РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПРАКТИЧЕСКИЕ И ЛАБОРАТОРНЫ РАБОТЫ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

Оглавление

1.1. Практическая работа 1

Решение дифференциальных уравнений первого порядка для последующего моделирования динамических систем:

- решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными;
- решение дифференциальных уравнений, приводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными;
- решение однородных дифференциальных уравнений.

1.2. Задание 1.1 – разделяющиеся переменные

Задание 1.1

$$y' = x^2 \sqrt[3]{y} \qquad (1.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (1.1.1) с разделяющимися переменными.

1.3. Задание 1.1 – дифференциалы, интегралы

Выразим производную через дифференциалы

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt[3]{y}.$$

ДЕЛ

Умножим на dx и разделим на $\sqrt[3]{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x^2 dx. \tag{1.1.2}$$

ИНГ

Проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int x^2 dx + C. \tag{1.1.3}$$

1.4. Задание 1.1 – таблица интегралов

Применим формулу из таблицы неопределенных интегралов к левой части

$$\int x^n dx = \frac{1}{1+n} x^{n+1} \qquad (1.1.4)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int y^{-1/3} dy = \frac{1}{-1/3+1} y^{-1/3+1} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}.$$

Применим формулу (1.1.4) к правой части уравнения (1.1.3)

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} = \frac{1}{3} x^3 + C.$$

Подставляя полученные решения в (1.1.3), получаем решение

РЕШ

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} x^3 + \mathrm{C}. \qquad (1.1.5)$$

1.5. Задание 1.1 – окончательный результат

Так как (1.1.2) получено делением на $\sqrt[3]{y}$, проверим, является ли оно решением. Очевидно. что $y = 0$ является решением исходного уравнения и не входит в общее решение (1.1.5). Поэтому окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^3 + C;\ y = 0.$$

1.6. Задание 1.2 – приведение к разделяющимся

Задание 1.2

$$y' = (x-y)^2+1 \qquad (1.2.1)$$

решить (1.2.1), приведя дифференциальное уравнение
к уравнению с разделяющимися переменными.

1.7. Задание 1.2 – подстановка

ПДС

Сделаем подстановку

$$u = x - y. \tag{1.2.2}$$

ДИФ

Дифференцируем по x, при чем y есть функция от x

$$\frac{du}{dx} = (x - y)' = x' - y' = 1 - y'. \tag{1.2.3}$$

ДОБ

Добавляем в (1.2.3) значение y' из (1.2.1), получаем

$$\frac{du}{dx} = 1 - (x - y)^2 - 1 = -(x - y)^2 \tag{1.2.4}$$

ЗАМ

Выполним замещение в (1.2.4), используя (1.2.2)

1.8. Задание 1.2 – интегрируем

$$\frac{du}{dx} = -(x-y)^2 = -u^2. \qquad (1.2.5)$$

ДЕЛ

Разрешаем уравнение (1.2.5), умножаем на dx и делим на u^2

$$\frac{du}{u^2} = -dx. \qquad (1.2.6)$$

ИНГ

Интегрируем

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int dx + C. \qquad (1.2.7)$$

Применим формулу (1.1.4) к левой части (1.2.7)

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = -u^{-1} = -\frac{1}{u}. \qquad (1.2.8)$$

1.9. Задание 1.2 – подставляем

Применим формулу из таблицы интегралов к правой части уравнения

$$\int dx = x \qquad (1.2.9)$$

$$-\int dx + C = -x + C. \qquad (1.2.10)$$

Подставим (1.2.8) и (1.2.10) в (1.2.7)

$$-\frac{1}{u} = -x + C,$$
$$u = \frac{1}{x-C}. \qquad (1.2.11)$$

Используя (1.2.11), найдем общее решение из подстановки (1.2.2)

РЕШ

$$u = x - y = \frac{1}{x-C},$$
$$y = x - \frac{1}{x-C}. \qquad (1.2.12)$$

1.10. Задание 1.2 – окончательный результат

Так как (1.2.6) получено делением на u^2 проверим, является ли оно решением. Запишеи $u = 0$ и подставим в 1.2.2

$$u = 0 = x - y,$$
$$y = x. \tag{1.2.13}$$

Принимая во внимание (1.2.12) и (1.2.13), окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$y = x - \frac{1}{x - C};\ y = x.$$

1.11. Задание 1.3 – однородные уравнения

Задание 1.3

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2} \qquad (1.3.1)$$

решить однородной дифференциальное уравнение (1.3.1).

1.12. Задание 1.3 – проверка

Проверим, является ли уравнение однородным.
Заменяем $y \to ty, x \to tx$, при этом $y' \to y'$

$$txy' = ty + \sqrt{(ty)^2 - (tx)^2},$$
$$txy' = ty + t\sqrt{y^2 - x^2}. \qquad (1.3.2)$$

Сокращаем (1.3.2) на t

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$$

ОДН

Так как t сократилось, уравнение является однородным.
Делаем подстановку, где u есть функция от x

ПДС

$$y = ux, \qquad (1.3.3)$$
$$y' = (ux)' = u'x + ux' = u'x + u. \qquad (1.3.4)$$

1.13. Задание 1.3 – подстановка

Подставляем (1.3.3) и (1.3.4) в исходное уравнение (1.3.1)

$$xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2},$$
$$x(u'x + u) = ux + \sqrt{(ux)^2 - x^2},$$
$$x^2u' + ux = ux + \sqrt{x^2(u^2 - 1)},$$
$$x^2u' = |x|\sqrt{(u^2 - 1)},$$
$$x^2u' = \pm x\sqrt{(u^2 - 1)},$$
$$xu' = \pm\sqrt{(u^2 - 1)}.$$

ДИФ

Дифференцируем по x, при чем u есть функция от x

$$x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{(u^2 - 1)}. \qquad (1.3.5)$$

Разрешаем уравнение (1.3.5), умножаем на $\pm dx$ и делим на $x\sqrt{(u^2 - 1)}$

1.14. Задание 1.3 – интегрирование

ДЕЛ

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}}=\frac{dx}{x}. \tag{1.3.6}$$

Проинтегрируем (1.3.6)

ИНГ

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{(u^2-1)}}=\int\frac{dx}{x}. \tag{1.3.7}$$

Применим формулу из таблицы интегралов к левой части уравнения

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C \tag{1.3.8}$$

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u^2+1)}}=\pm\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|. \tag{1.3.9}$$

Применим формулу из таблицы интегралов к правой части уравнения

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C. \tag{1.3.10}$$

1.15. Задание 1.3 – вспомогательная формула

Подставим (1.3.9) и (1.3.10) в (1.3.7)

$$\pm \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|x| + C,$$
$$\pm \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|x| + \ln|C|,$$
$$\pm \ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|Cx|. \qquad (1.3.11)$$

Применим вспомогательную формулу, тогда

$$\pm \ln\left|a+\sqrt{a^2-1}\right| = \ln\left|a\pm\sqrt{a^2-1}\right| \qquad (1.3.12)$$

$$\ln\left|u\pm\sqrt{u^2-1}\right| = \ln|Cx|,$$
$$\left|u\pm\sqrt{u^2-1}\right| = Cx,$$
$$u\pm\sqrt{u^2-1} = Cx. \qquad (1.3.13)$$

Разрешаем уравнение (1.3.13), умножаем на x и используем (1.3.3)

1.16. Задание 1.3 – возведение в квадрат

ЗАМ

$$ux \pm x\sqrt{u^2-1} = Cx^2,$$
$$y + |x|\sqrt{u^2-1} = Cx^2,$$
$$y + \sqrt{(ux)^2 - x^2} = Cx^2,$$
$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2,$$
$$\sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2 - \mathrm{y}.$$

Возводим в квадрат и получаем общее решение

РЕШ

$$y^2 - x^2 = (Cx^2 - \mathrm{y})^2,$$
$$y^2 - x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2,$$
$$-x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y,$$
$$2Cx^2y = C^2x^4 + x^2,$$
$$y = \frac{C}{2}x^2 + \frac{1}{2C}. \qquad (1.3.14)$$

Так как (1.3.6) получено делением на $x\sqrt{(u^2-1)}$ проверим, является ли оно решением. Запишем $(u^2-1) = 0$ и подставим в 1.3.3

1.17. Задание 1.3 – окончательный результат

$$(u^2-1)\ =0,$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=1,$$
$$y=\pm x. \tag{1.3.15}$$

Принимая во внимание (1.3.14) и (1.3.15), окончательный результат будет

ОБЩРЕШ

$$y=\frac{C}{2}x^2+\frac{1}{2C};\ y=x;\ y=-x.$$

1.18. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 1.4

$$y' = -3y \qquad (1.4.1)$$

решить дифференциальное уравнение (1.4.1) с разделяющимися переменными.

Задание 1.5

$$y' = \frac{1}{ln(3x-y)} + 3 \qquad (1.5.1)$$

решить (1.5.1), приведя дифференциальное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, используя

$$\int lnxdx = x(lnx - 1) + C.$$

1.18. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 1.6

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2} \tag{1.6.1}$$

решить однородной дифференциальное уравнение (1.6.1).

2.1. Практическая работа 2

Решение дифференциальных уравнений первого порядка для последующего моделирования динамических систем:

- решение дифференциальных уравнений первого порядка, приводящихся к однородным;

- решение обобщенных однородных дифференциальных уравнений, первого порядка.

- решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Лагранжа.

2.2. Задание 2.1 – приводящееся к однородному

Задание 2.1

$$(2x - y + 4)y' + x - 2y + 5 = 0 \qquad (2.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (2.1.1), приводящегося к однородному уравнению первого порядка.

2.3. Задание 2.1 – проверка на однородность

Проверим, является ли (2.1.1) однородным. Выделим две линейные формы

$$2x - y + 4, \qquad (2.1.2а)$$
$$x - 2y + 5. \qquad (2.1.2б)$$

Заменим (2.1.2) с использованием t

$$2x - y + 4 \ \to t(2x - y + 4), \qquad (2.1.3а)$$
$$x - 2y + 5 \to t(x - 2y + 5), \qquad (2.1.3б)$$

Подставим (2.1.3) в (2.1.1) и заменим $y' = \frac{dy}{dt}$

$$t(2x - y + 4)\frac{dy}{dt} + t(x - 2y + 5) = 0. \qquad (2.1.4)$$

Делим на t

2.4. Задание 2.1 – система

$$(2x - y + 4)\frac{dy}{dt} + (x - 2y + 5) = 0. \qquad (2.1.5)$$

ОДН

Так как t сократилось, значит уравнение однородное, решаем систему

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \qquad (2.1.6)$$

Подставляем первое уравнение из (2.1.6) во второе

$$\begin{gathered} \mathrm{y} = 2x + 4, \\ x - 2(2x + 4) + 5 = 0, \\ x - 4x - 8 + 5 = 0, \\ -3x = 3, \\ x = -1, \end{gathered}$$

Подставляем полученное решение в первое уравнение (2.1.6)

2.5. Задание 2.1 – подстановка

$$y = 2x + 4, x = -1,$$
$$y = -2 + 4 = 2,$$
$$y = 2.$$

Имеем решение системы (2.1.6)

РЕШ

$$x_0 = -1, y_0 = 2.$$

Делаем подстановку, где u зависит от t, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}$

ПДС

$$x = t + x_0 = t - 1, \quad (2.1.7а)$$
$$y = u + y_0 = u + 2. \quad (2.1.7б)$$

Подставляем (2.1.7) в уравнения из (2.1.6)

$$2x - y + 4 = 2(t - 1) - (u + 2) + 4 = 2t - u, \quad (2.1.8а)$$

2.6. Задание 2.1 – замещение

$$x - 2y + 5 = t - 1 - 2(u + 2) + 5 = t - 2u. \quad (2.1.8б)$$

Подставляем (2.1.8) в (2.1.1)

$$(2t - u)\frac{du}{dt} + t - 2u = 0. \quad (2.1.9)$$

ЗАМ

Уравнение (2.1.9) является однородным, для его решения делаем замещение

$$u = zt, z \text{ есть функция от } t, \quad (2.1.10а)$$
$$u' = (zt)' = z't + zt' = z't + z. \quad (2.1.10б)$$

Подставляем (2.1.10б) в (2.1.9)

$$(2t - zt)(z't + z) + t - 2zt = 0. \quad (2.1.11)$$

2.7. Задание 2.1 – интегрируем

Сокращаем в (2.1.11) t и делаем преобразование

$$(2-z)(z't+z)+1-2z=0,$$
$$(2-z)z't+2z-z^2+1-2z=0,$$
$$(2-z)t\frac{dz}{dt}=z^2-1.$$

ДЕЛ

Умножаем на dt и делим на $t(z^2-1)$

$$\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\frac{dt}{t}. \qquad (2.1.12)$$

ИНГ

Интегрируем (2.1.12)

$$\int\frac{(2-z)dz}{z^2-1}=\int\frac{dt}{t}+C. \qquad (2.1.13)$$

2.8. Задание 2.1 – проверка на однородность

Применим таблицу интегралов (1.3.10) для поиска правой части (2.1.13)

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C. \qquad (2.1.14)$$

Используем таблицу интегралов (1.3.10) для левой части (2.1.13), а также

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

и свойство внесения значения в дифференциал

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{x}$$

$$\int \frac{(2-z)dz}{z^2-1} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} - \int \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{2}{2} \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2-1\right)}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2} \ln|(z^2-1)| \qquad (2.1.15)$$

Подставляя (2.1.14) и (2.1.15) в (2.1.13), имеем

2.9. Задание 2.1 – переменные

$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\ln|(z^2-1)| = \ln|t| + C,$$
$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{1}{2}\ln|(z^2-1)| = \ln|t| + \ln|C|,$$
$$2\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \ln|(z^2-1)| = 2\ln|Ct|,$$
$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = |(z^2-1)|Ct^2.$$

Умножим на $(z+1)^2$ и применим $(z^2-1) = (z-1)(z+1)$

$$(z-1)^2 = (z+1)^2(z-1)(z+1)Ct^2,$$
$$z-1 = (z+1)^3Ct^2. \qquad (2.1.16)$$

Возвращаемся к переменным u и t, используя (2.1.10а), умножим (2.1.16) на t

$$u = zt,$$
$$(z-1)t = (z+1)^3Ct^3,$$
$$zt - t = C(zt+t)^3,$$

2.10. Задание 2.1 – решение

$$u - t = C(u + t)^3. \qquad (2.1.17)$$

Возвращаемся к переменным x и y, используя (2.1.7), найдем общее решение

РЕШ

$$x = t - 1, \text{ т.е. } t = x + 1, \qquad (2.1.18а)$$
$$y = u + 2, \text{ т.е. } u = y - 2, \qquad (2.1.18б)$$
$$y - 2 - (x + 1) = C(y - 2 + x + 1)^3,$$
$$y - x - 3 = C(y + x - 1)^3. \qquad (2.1.18в)$$

Так как (2.1.12) получено делением на $t(z^2 - 1)$ проверим, является ли оно решением. Запишем $z^2 = 1$ и подставим $z = \pm 1$ в (2.1.10а), используя (2.1.18а) и (2.1.18б)

$$u = zt,$$
$$z = \frac{u}{t} = \frac{y - 2}{x + 1} = \pm 1,$$
$$y - 2 = \pm x \pm 1. \qquad (2.1.19)$$

2.11. Задание 2.1 – общее решение

Для верхнего знака «+» из (2.1.19) имеем

$$y - 2 = x + 1,$$
$$y - x - 3 = 0. \qquad (2.1.20)$$

Общее решение (2.1.18в) учитывает (2.1.20) при *C=0*.
Для нижнего знака «-» из (2.1.19) имеем

$$y - 2 = -x - 1,$$
$$y + x - 1 = 0. \qquad (2.1.21)$$

Общее решение (2.1.18в) не учитывает (2.1.21).
Поэтому общее решение запишется в виде

ОБЩРЕШ

$$y - x - 3 = C(y + x - 1)^3; \; y + x - 1 = 0.$$

2.13. Задание 2.2 – обобщенное

Задание 2.2

$$(1 - xy)xy' + y(1 + xy) = 0 \qquad (2.2.1)$$

решить обобщенное однородное дифференциальное уравнение первого порядка (2.2.1).

2.14. Задание 2.2 – проверка на однородность

Проверим, является ли (2.2.1) однородным обобщенным.
Делаем замену

$$y \to t^{\alpha} y,\ x \to tx,\ y' \to t^{\alpha-1} y'. \qquad (2.2.2)$$

Подставляем (2.2.2) в (2.2.1)

ОДН

$$(1 - txt^{\alpha} y) txt^{\alpha-1} y' + t^{\alpha} y (1 + txt^{\alpha} y) = 0,$$
$$(1 - xyt^{\alpha+1}) xy' t^{\alpha} + t^{\alpha} y (1 + xyt^{\alpha+1}) = 0. \qquad (2.2.3)$$

Разделим (2.2.3) на t^{α}, t сократится, если $\alpha = -1$. Значит это обобщенное однородное уравнение. Используем α для подстановки

ПДС

$$y = zx^{\alpha} = zx^{-1}, \text{ где } z \text{ есть функция от } x \qquad (2.2.4)$$

Берем производную от (2.2.4), используя $(x^{a})' = ax^{a-1}$

2.15. Задание 2.2 – подстановка

$$y' = (zx^{-1})' = z'x^{-1} + z(x^{-1})' = z'x^{-1} - zx^{-2}. \qquad (2.2.5)$$

Подставляем (2.2.4) и (2.2.5) в исходное уравнение (2.2.1)

ЗАМ

$$(1 - xy)xy' + y(1 + xy) = 0,$$
$$(1 - xzx^{-1})x(z'x^{-1} - zx^{-2}) + zx^{-1}(1 + xzx^{-1}) = 0,$$
$$(1 - z)(z' - zx^{-1}) + zx^{-1}(1 + z) = 0.$$

Умножим на x и раскрываем скобки

$$(1 - z)(xz' - z) + z\,(1 + z) = 0,$$
$$(1 - z)xz' - z + z^2 + z + z^2 = 0,$$
$$(z - 1)x\frac{dz}{dx} = 2z^2. \qquad (2.2.6)$$

2.16. Задание 2.2 – интеграл

ДЕЛ

Умножаем (2.2.6) на dx и делим на xz^2 имеем

$$\frac{(z-1)dz}{z^2} = 2\frac{dx}{x}. \qquad (2.2.7)$$

ИНГ

Интегрируем уравнение (2.2.7)

$$\int \frac{(z-1)dz}{z^2} = 2\int \frac{dx}{x}. \qquad (2.2.8)$$

Преобразуем правую часть интеграла (2.2.8), используя (1.3.10)

$$2\int \frac{dx}{dx} = 2\ln|x| = lnx^2. \qquad (2.2.9)$$

Преобразуем левую часть интеграла (2.2.8), используя (1.3.10) и (1.1.4)

2.17. Задание 2.2 – подставление

$$\int \frac{(z-1)dz}{z^2} = \int \frac{dz}{z} - \int z^{-2}dz = \ln|z| - \frac{1}{-2+1}z^{-2+1} = \ln|z| + \frac{1}{z}. \quad (2.2.10)$$

Подставляем (2.2.9) и (2.2.10) в уравнение (2.2.8)

$$\ln|z| + \frac{1}{z} = lnx^2 + C,$$

$$\ln|z| + \frac{1}{z} = lnCx^2,$$

$$|z|e^{\frac{1}{z}} = Cx^2. \quad (2.2.11)$$

Подставляем в (2.2.11) значение (2.2.4), находим решение

РЕШ

$$z = xy,$$

$$xye^{\frac{1}{xy}} = Cx^2,$$

$$ye^{\frac{1}{xy}} = Cx. \quad (2.2.12)$$

2.18. Задание 2.2 – решение

Так как (2.2.12) получено делением на xz^2 в (2.2.7) проверим, является ли оно решением. Запишем $z^2 = 0$ и подставим $z = 0$ в (2.2.4)

$$z = xy = 0,$$
$$y = 0. \qquad (2.2.13)$$

Общее решение (2.2.12) не учитывает (2.2.13).
Поэтому общее решение запишется в виде

ОБЩРЕШ

$$ye^{\frac{1}{xy}} = Cx; \; y = 0.$$

2.20. Задание 2.3 – Лагранж

Задание 2.3

$$xy' + 3y = x^2 \qquad (2.3.1)$$

решить линейное дифференциальное уравнение
первого порядка (2.3.1) методом Лагранжа.

2.21. Задание 2.3 – однородное

Решаем однородное уравнение

$$xy' + 3y = 0. \tag{2.3.2}$$

Добавляем дифференциал в (2.3.2)

ДЕЛ

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 0. \tag{2.3.3}$$

Умножаем на dx и делим на xy уравнение (2.3.3)

$$\frac{dy}{y} + 3\frac{dx}{x} = 0. \tag{2.3.4}$$

ИНГ

Интегрируем (2.3.4)

2.22. Задание 2.3 – замена C

$$\int \frac{dy}{y} + 3\int \frac{dx}{x} = 0. \qquad (2.3.5)$$

Используя табличные интегралы (1.3.10) получаем

РЕШ

$$\ln|y| + 3\ln|x| = C,$$
$$|y| \cdot |x|^3 = e^C,$$
$$yx^3 = C,$$
$$y = \frac{C}{x^3}. \qquad (2.3.6)$$

Заменим C на функцию от x, $C \to u(x)$ и подставим в (2.3.6)

ПДС

$$y = \frac{u}{x^3}. \qquad (2.3.7)$$

Найдем производную от (2.3.7), используя

$$(x^a)' = ax^{a-1}. \qquad (2.3.8)$$

2.23. Задание 2.3 – интеграл

$$y' = \left(u\frac{1}{x^3}\right)' = u'\frac{1}{x^3} + u(x^{-3})' = \frac{u\prime}{x^3} - u3x^{-4} = \frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^4}. \quad (2.3.9)$$

Подставляем (2.3.7) и (2.3.9) в исходное уравнение (2.3.1)

ЗАМ

$$xy' + 3y = x^2, y = \frac{u}{x^3},$$

$$x\left(\frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^{-4}}\right) + \frac{3u}{x^3} = x^2,$$

$$\frac{u'}{x^2} = x^2,$$

$$u' = x^4,$$

$$\frac{du}{dx} = x^4. \quad (2.3.10)$$

Интегрируем (2.3.10), используя (1.1.4)

2.24. Задание 2.3 – решение

$$u = \int x^4 dx + C = \frac{1}{5}x^5 + C. \qquad (2.3.11)$$

Получаем общее решение, подставляя в (2.3.7) данные (2.3.11)

ОБЩРЕШ

$$y = \frac{u}{x^3},$$

$$y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right),$$

$$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{C}{x^3}.$$

2.25. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 2.4

$$(x + 2y + 1)y' + x + y - 2 = 0 \qquad (2.4.1)$$

решить дифференциальное уравнение первого порядка (2.4.1), приводящиеся к однородному.

Задание 2.5

$$(xy - 2)xy' + y = 0 \qquad (2.5.1)$$

решить обобщенное однородное дифференциальное уравнение первого порядка (2.5.1).

2.26. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 2.6

$$y' - (x-1)y = x \qquad (2.6.1)$$

решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка методом Лагранжа (2.6.1).

3.1. Практическая работа 3

Решение дифференциальных уравнений первого порядка на основе численных методов:

- решение дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Эйлера *k*-го порядка;
- решение обобщенных однородных дифференциальных уравнений с использованием метода Рунге-Кутта *4*-го порядка;
- решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода Штермера.

3.2. Задание 3.1 – Эйлер

Задание 3.1

$$y' = x + y^2,\ 0 \le x \le 1,\ y_0 = y(0) = 0.3,\ k = 2,\ h = 0.2 \qquad (3.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.1.1)
методом Эйлера 2-го порядка с 3-я знаками после запятой.

3.3. Задание 3.1 – формула

Запишем общую формулу Эйлера

$$y' = x + y^2$$

$$y_{l+1} = y_l + h\dot{y}_l + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_l,$$

$$y_{l+1} = y_l + hf(x_l, y_l) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_l, y_l)}{\partial y} \cdot f(x_l, y_l)\right),$$

$$y_{l+1} = y_l + h(x_l + {y_l}^2) + \frac{h^2}{2}(1 + 2y_l(x_l + {y_l}^2)),$$

$$y_{l+1} = y_l + 0.2(0.2l + {y_l}^2) + 0.02(1 + 0.4ly_l + 2{y_l}^3), \qquad (3.1.2)$$

при $x_l = x_0 + hl = 0 + 0.2l = 0.2l, \; l = 0,1,2,\dots,4.$

Полагая последовательно $l = 0,1,2,\dots,4$ в (3.1.2), получаем

$$y_1 = 0.3 + 0.2 \cdot 0.09 + 0.02(1 + 0.054) = 0.339,$$

$$y_2 = 0.339 + 0.2(0.2 + (0.339)^2) + 0.02(1 + 0.4 \cdot 0.339 + 2 \cdot (0.339)^3)) = 0.426,$$

3.4. Задание 3.1 – решение

$$y_3 = 0.426 + 0.2(0.4 + (0.426)^2) + 0.02\big(1 + 0.8 \cdot 0.426 + 2 \cdot (0.426)^3)\big) = 0.572,$$
$$y_4 = 0.572 + 0.2(0.6 + (0.572)^2) + 0.02\big(1 + 1.2 \cdot 0.572 + 2 \cdot (0.572)^3)\big) = 0.799,$$
$$y_5 = 0.799 + 0.2(0.8 + (0.799)^2) + 0.02\big(1 + 1.6 \cdot 0.799 + 2 \cdot (0.799)^3)\big) = 1.153.$$

При значениях $x_l = 0.2l,\ \ l = 0,2, \dots, 4$

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.2,$$
$$x_3 = 0.4,$$
$$x_4 = 0.5,$$
$$x_5 = 0.8.$$

3.5. Задание 3.2 – Рунге-Кутт 4-го порядка

Задание 3.2

$$y' = y^2 - x,\ 0 \le x \le 0.5,\ y_0 = y(0) = 0.5,\ h = 0.1 \qquad (3.2.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.2.1)
методом Рунге-Кутта 4-го порядка с 3-я знаками после запятой.

3.6. Задание 3.2 – формула

Запишем формулу Рунге-Кутта 4-го порядка

$$k_{i1} = f_i(x_l, y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{ml}),$$
$$k_{i2} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{11}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{21}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l1}}{2}\right),$$
$$k_{i3} = f_i\left(x_l + \frac{h}{2}, y_{1l} + \frac{hk_{12}}{2}, y_{2l} + \frac{hk_{22}}{2}, \dots, y_{ml} + \frac{hk_{l2}}{2}\right),$$
$$k_{i4} = f_i(x_l + h, y_{1l} + hk_{13}, y_{2l} + hk_{23}, \dots, y_{ml} + hk_{l3}).$$

Тогда приближенные значения находятся по формуле

$$y_{i,\,l+1} = y_{i,\,l} + \frac{h}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}), \qquad (3.2.2а)$$
$$x_l = hl. \qquad (3.2.2б)$$

3.7. Задание 3.2 – решение

Используя (3.2.2), находим

$$
\begin{gathered}
y' = y^2 - x, \\
k_{1l} = {y_l}^2 - x_l, \\
k_{2l} = (y_l + 0.05k_{1l})^2 - x_l - 0.05, \\
k_{3l} = (y_l + 0.05k_{2l})^2 - x_l - 0.05, \\
k_{4l} = (y_l + 0.1k_{3l})^2 - x_l - 0.1, \\
y_{l+1} = y_l + \frac{0.1}{6}(k_{1l} + 2k_{2l} + 2k_{3l} + k_{4l}), \\
x_l = 0.1l, y_0 = y(0) = 0.5, l = 0,1,2, \dots, 4.
\end{gathered}
$$

Полагая последовательно $l = 0,1,2, \dots, 4$ в (3.1.2) получаем

$$
\begin{gathered}
k_{10} = 0.5^2 - 0 = 0.25, \\
k_{20} = (0.5 + 0.05 \cdot 0.25)^2 - 0 - 0.05 = 0.212, \\
k_{30} = (0.5 + 0.05 \cdot 0.212)^2 - 0 - 0.05 = 0.210, \\
k_{40} = (0.5 + 0.1 \cdot 0.210)^2 - 0 - 0.1 = 0.171,
\end{gathered}
$$

3.8. Задание 3.2 – решение

$$y_1 = 0.5 + \frac{0.1}{6}(0.25 + 2 \cdot 0.212 + 2 \cdot 0.210 + 0.171) = 0.521,$$
$$x_0 = 0, l = 0.$$

$$k_{11} = 0.521^2 - 0.1 = 0.171,$$
$$k_{21} = (0.521 + 0.05 \cdot 0.171)^2 - 0.1 - 0.05 = 0.131,$$
$$k_{31} = (0.521 + 0.05 \cdot 0.131)^2 - 0.1 - 0.05 = 0.129,$$
$$k_{41} = (0.521 + 0.1 \cdot 0.129)^2 - 0.1 - 0.1 = 0.085,$$
$$y_2 = 0.521 + \frac{0.1}{6}(0.171 + 2 \cdot 0.131 + 2 \cdot 0.129 + 0.085) = 0.534,$$
$$x_1 = 0.1, l = 1.$$

$$k_{12} = 0.534^2 - 0.2 = 0.085,$$
$$k_{22} = (0.534 + 0.05 \cdot 0.085)^2 - 0.2 - 0.05 = 0.039,$$
$$k_{32} = (0.534 + 0.05 \cdot 0.039)^2 - 0.2 - 0.05 = 0.037,$$
$$k_{42} = (0.534 + 0.1 \cdot 0.037)^2 - 0.2 - 0.1 = -0.011,$$
$$y_3 = 0.534 + \frac{0.1}{6}(0.085 + 2 \cdot 0.039 + 2 \cdot 0.037 - 0.011) = 0.538,$$
$$x_2 = 0.2, l = 2.$$

3.9. Задание 3.2 – решение

$$k_{13} = 0.538^2 - 0.3 = -0.011,$$
$$k_{23} = (0.538 - 0.05 \cdot 0.011)^2 - 0.3 - 0.05 = -0.061$$
$$k_{33} = (0.5381 - 0.05 \cdot 0.061)^2 - 0.3 - 0.05 = -0.064,$$
$$k_{43} = (0.538 - 0.1 \cdot 0.064)^2 - 0.3 - 0.1 = -0.011,$$
$$y_4 = 0.538 - \frac{0.1}{6}(0.011 + 2 \cdot 0.061 + 2 \cdot 0.064 + 0.011) = 0.532,$$
$$x_3 = 0.3,\ l = 3.$$

$$k_{12} = 0.532^2 - 0.4 = -0.117,$$
$$k_{22} = (0.532 - 0.05 \cdot 0.117)^2 - 0.4 - 0.05 = -0.173,$$
$$k_{32} = (0.532 - 0.05 \cdot 0.173)^2 - 0.4 - 0.05 = -0.175,$$
$$k_{42} = (0.532 - 0.1 \cdot 0.175)^2 - 0.4 - 0.1 = -0.235,$$
$$y_5 = 0.532 - \frac{0.1}{6}(0.117 + 2 \cdot 0.173 + 2 \cdot 0.175 - 0.235) = 0.515,$$
$$x_4 = 0.4,\ l = 4.$$

3.10. Задание 3.3 – Штермер

Задание 3.3

$$y' = y,\ 0 \le x \le 0.5,\ y_0 = y(0) = 1,\ h = 0.1 \qquad (3.3.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.3.1)
методом Штермера с 3-я знаками после запятой.

3.11. Задание 3.3 – формула

Запишем формулу Штермера

$$y_{i,\,l+1} = y_{i,\,l} + q_{i,\,l} + \frac{1}{2}\Delta\, q_{i,\,l-1},$$
$$\Delta\, q_{i,\,l-1} = q_{i,\,l} - q_{i,\,l-1}.$$

Тогда

$$y_{l+1} = y_l + q_l + \frac{1}{2}\Delta\, q_{l-1},$$
$$y_{l+1} = y_l + hy_l{}' + \frac{h}{2}(y_l' - y'_{l-1}),$$
$$y_{l+1} = y_l + hy_l + \frac{h}{2}(y_l - y_{l-1}),$$
$$y_{l+1} = 1.15y_l - 0.05y_{l-1}.$$

Для поиска y_1 применим метод Рунге-Кутта 4-го порядка

3.12. Задание 3.3 – решение

$$k_1 = y_0 = 1,$$
$$k_2 = y_0 + \frac{h}{2}k_1 = 1.05,$$
$$k_3 = y_0 + \frac{h}{2}k_2 = 1.052,$$
$$k_4 = y_0 + hk_3 = 1.105,$$
$$y_1 = y_0 + \frac{0.1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1.105.$$

Тогда

$$y_2 = 1.15y_1 - 0.05y_0 = 1.15 \cdot 1.105 - 0.05 \cdot 1 = 1.221,$$
$$y_3 = 1.15y_2 - 0.05y_1 = 1.15 \cdot 1.121 - 0.05 \cdot 1.105 = 1.349,$$
$$y_4 = 1.15y_3 - 0.05y_2 = 1.15 \cdot 1.349 - 0.05 \cdot 1.221 = 1.490,$$
$$y_5 = 1.15y_4 - 0.05y_3 = 1.15 \cdot 1.490 - 0.05 \cdot 1.349 = 1.649.$$

А также

3.13. Задание 3.3 – решение

$$x_{l+1} = hl = 0.1l,\ l = 0,1,2,\dots,4,$$
$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0.1,$$
$$x_3 = 0.2,$$
$$x_4 = 0.3,$$
$$x_5 = 0.4.$$

3.14. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 3.4

$$x' = t + 2x - y, \qquad y' = 1 - x + 2y, \qquad (3.4.1)$$

$$0 \le t \le 0.5, \qquad x(0) = y(0) = 0, \qquad k = 2, \qquad h = 0.1$$

решить дифференциальное уравнение (3.4.1)
методом Эйлера 2-го порядка с 3-я знаками после запятой.

Задание 3.5

$$y' = x^2 - y^2,\ 1 \le x \le 2,\ y_0 = y(1) = 1,\ h = 0.2 \qquad (3.5.1)$$

решить дифференциальное уравнение (3.5.1)
методом Рунге-Кутта 4-го порядка с 3-я знаками после запятой.

3.15. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 3.6

$$y' = \frac{x^2}{x+y}, \qquad (3.6.1)$$

$$1 \le x \le 1.5, \qquad y(1) = 0, \qquad h = 0.1$$

решить дифференциальное уравнение (3.6.1)
методом Штермера с 3-я знаками после запятой.

4.1. Практическая работа 4

Решение дифференциальных уравнений высшего порядка для последующего моделирования динамических систем :

- решение дифференциальных уравнений высшего порядка непосредственным интегрированием;
- решение дифференциальных уравнений высшего порядка не содержащих в явном виде y;
- решение дифференциальных уравнений высшего порядка не содержащих в явном виде x.

4.2. Задание 4.1 – интегрированием

Задание 4.1

$$y''' sin^4 x = sin 2x \qquad (4.1.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.1.1) непосредственным интегрированием.

4.3. Задание 4.1 – преобразование

Применим формулу тригонометрии

$$sin2a = 2sina \cdot cosa \tag{4.1.2}$$

$$y'''sin^4x = sin2x,$$

$$y''' = \frac{sin2x}{sin^4x} = \frac{2sinx \cdot cosx}{sin^4x} = 2\frac{cosx}{sin^3x}.$$

Проинтегрируем уравнение, используя и свойство внесения значения в дифференциал и $sinx' = cosx$

$$y'' = 2\int \frac{cosx}{sin^3x}dx = 2\int \frac{cosx}{cosx \cdot sin^3x}d(sinx) = 2\int sin^{-3}xd(sinx).$$

Воспользуемся формулой (1.1.4)

$$y'' = \frac{2}{-3+1}sinx^{-3+1} + C_1 = -\frac{1}{sin^2x} + C_1. \tag{4.1.3}$$

4.4. Задание 4.1 – интеграл

Проинтегрируем уравнение (4.1.3) еще раз

$$y' = \int (-\frac{1}{sin^2 x} + C_1)dx\,.$$

Используя табличный интеграл

$$\int \frac{1}{sin^2} dx = -ctgx\,,$$

$$y' = -\int \frac{1}{sin^2 x} dx + \int C_1 dx = ctgx + C_1 x + C_2.$$

Итого

$$y = \int ctgxdx + \int (C_1 x + C_2)dx = \int \frac{cosx}{sinx} dx + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x,$$

4.5. Задание 4.1 – решение

Воспользуемся табличным интегралом (1.3.10), тогда

$$y = \int \frac{cosx}{cosx \cdot sinx} d(sinx) + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x = ln|sinx| + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Итоговое решение

$$y = ln|sinx| + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

4.6. Задание 4.2 – без y

Задание 4.2

$$y''' + y''^2 = 0 \qquad (4.2.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.2.1),
не содержащее в явном виде y.

4.7. Задание 4.2 – подстановка

Сделаем подстановку

$$y'' = u(x),$$
$$y''' = (y'')' = u'.$$

Подставим замещение в (4.2.1)

$$y''' + y''^2 = 0,$$
$$u' + u^2 = 0,$$
$$\frac{du}{dx} = -u^2.$$

Умножаем на dx и делим уравнение на u^2

$$\frac{du}{u^2} = -dx.$$

4.8. Задание 4.2 – интегрируем

Интегрируем

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int dx\,.$$

Применяя формулы (1.1.4) и (1.2.9), получаем

$$\int u^{-2} du = -\int dx\,,$$

$$-\frac{1}{u} = -x - C_1,$$

$$u = \frac{1}{x + C_1},$$

$$y'' = u = \frac{1}{x + C_1}.$$

Находим интеграл

4.9. Задание 4.2 – интегрируем

$$y' = \int \frac{dx}{x + C_1} = \int \frac{d(x + C_1)}{x + C_1}.$$

Применяя формулу (1.3.10), получаем

$$y' = \ln|x + C_1| + C_2.$$

Повторно интегрируем

$$y = \int (\ln|x + C_1| + C_2)dx = \int \ln|x + C_1|dx + C_2 x.$$

Воспользуемся табличным значением

$$\int lnxdx = xlnx - x + C. \qquad (4.2.2)$$

4.10. Задание 4.2 – формула

$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - (x + C_1) + C_3 + C_2 x\,,$$
$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - x + C_2 x + C_4.$$

Рассмотрим случай $u^2 = 0$

$$y'' = u = 0.$$

Последовательно интегрируем

$$y' = C_5,$$
$$y = C_5 x + C_6.$$

Общее решение запишется в виде

4.11. Задание 4.2 – решение

$$y = (x + C_1)\ln|x + C_1| - x + C_2 x + C_4,$$
$$y = C_5 x + C_6.$$

4.12. Задание 4.3 – без *x*

Задание 4.3

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0 \qquad (4.3.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.3.1),
не содержащее в явном виде x.

4.13. Задание 4.3 – подстановка

Сделаем подстановку

$$y' = \frac{dy}{dx} = u, \qquad (4.3.2а)$$

$$y'' = (y')' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{du}{dy} = u\frac{du}{dy}. \qquad (4.3.2б)$$

Подставим (4.3.2) в (4.3.1)

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0,$$

$$2yu\frac{du}{dy} + u^2 + u^4 = 0,$$

$$2y\frac{du}{dy} + u + u^3 = 0,$$

$$2y\frac{du}{dy} = -(u + u^3).$$

Умножаем на dy и делим уравнение на $y(u + u^3) = yu(1 + u^2)$

4.14. Задание 4.3 – интегрируем

$$2\frac{du}{u(1+u^2)} = -\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем

$$2\int\frac{du}{u(1+u^2)} = -\int\frac{dy}{y}. \qquad (4.3.3)$$

Найдем левую часть уравнения (4.3.3)

$$\frac{1}{u(1+u^2)} = \frac{1+u^2-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{(1+u^2)},$$
$$\int\frac{du}{u(1+u^2)} = \int\frac{du}{u} - \int\frac{udu}{(1+u^2)}.$$

Воспользуемся формулой (1.3.10) и правилом возведения в дифференциал

4.15. Задание 4.3 – подставляем

$$\int \frac{du}{u(1+u^2)} = \ln|\mathrm{u}| - \frac{1}{2}\int \frac{ud(1+u^2)}{u(1+u^2)} = \ln|\mathrm{u}| - \frac{1}{2}\ln|1+u^2|. \qquad (4.3.4)$$

Найдем правую часть уравнения (4.3.3)

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|\mathrm{y}|. \qquad (4.3.5)$$

Подставим (4.3.4) и (4.3.5) в (4.3.3)

$$2\ln|\mathrm{u}| - \ln|1+u^2| + \ln|\mathrm{y}| = \mathrm{C}_1.$$

Потенцируем

$$\frac{u^2|\mathrm{y}|}{1+u^2} = e^{\mathrm{C}_1}.$$

4.16. Задание 4.3 – подстановка

Сделаем подстановку $e^{C_1} \to \frac{1}{C_1} > 0$ и используем замену (4.3.2а), тогда

$$\frac{u^2 y}{1+u^2} = \frac{1}{C_1},$$
$$u^2 y\, C_1 = 1 + u^2,$$
$$u^2 (C_1 y - 1) = 1,$$
$$u^2 = \frac{1}{(C_1 y - 1)},$$
$$u = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{(C_1 y - 1)}},$$
$$\sqrt{(C_1 y - 1)}\, dy = \pm dx.$$

Интегрируем

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}\, dy = \pm \int dx\,. \qquad (4.3.6)$$

Найдем правую часть уравнения (4.3.6), используя (1.2.9)

4.17. Задание 4.3 – подставляем

$$\int dx = x. \qquad (4.3.7)$$

Найдем левую часть уравнения (4.3.6), используя формулу (1.1.4) и правило возведения под знак дифференциала

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}dy = \int (C_1 y - 1)^{1/2} dy = \frac{1}{C_1} \int (C_1 y - 1)^{1/2} d(C_1 y - 1),$$

$$\int \sqrt{(C_1 y - 1)}dy = \frac{1}{C_1}\frac{2}{3}(C_1 y - 1)^{3/2}. \qquad (4.3.8)$$

Подставим (4.3.7) и (4.3.8) в (4.3.6)

$$\frac{2}{3C_1}(C_1 y - 1)^{3/2} = \pm(x + C_2),$$

$$2(C_1 y - 1)^{3/2} = \pm 3C_1(x + C_2),$$

$$4(C_1 y - 1)^3 = 9{C_1}^2(x + C_2)^2,$$

$$(C_1 y - 1)^3 = \frac{9}{4}{C_1}^2(x + C_2)^2,$$

$$C_1 y - 1 = \left(\frac{9}{4}{C_1}^2\right)^{1/3}(x + C_2)^{2/3},$$

4.18. Задание 4.3 – находим

$$y = \frac{1}{C_1} + \left(\frac{9}{4C_1}\right)^{1/3} (x + C_2)^{2/3}. \quad (4.3.9)$$

Рассмотрим случай $yu(1 + u^2) = 0$, т.е. $u = 0$

$$u = 0,$$
$$y' = u = 0,$$
$$y = C. \quad (4.3.10)$$

Общее решение с учетом (4.3.9) и (4.3.10) запишется

$$y = \frac{1}{C_1} + \left(\frac{9}{4C_1}\right)^{1/3} (x + C_2)^{2/3},$$
$$y = C.$$

4.19. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 4.4

$$y''' = x^2 + 3x \qquad (4.4.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.4.1) непосредственным интегрированием.

Задание 4.5

$$(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0 \qquad (4.5.1)$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.5.1), не содержащее в явном виде y.

4.20. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 4.6

$$yy'' + y - y'^2 = 0 \tag{4.6.1}$$

решить дифференциальное уравнение высших порядков (4.6.1),
не содержащее в явном виде x.

5.1. Практическая работа 5

Решение систем дифференциальных уравнений для последующего моделирования динамических систем:

- решение системы дифференциальных уравнений на основе метода исключений;
- решение системы дифференциальных уравнений на основе метода Эйлера;
- решение системы дифференциальных уравнений на основе матричного метода;
- решение системы дифференциальных уравнений на основе метода Лагранжа.

5.2. Задание 5.1 – метод исключения

Задание 5.1

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y + 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y + 1 \end{cases} \qquad (5.1.1)$$

решить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (5.1.1) методом исключения.

5.3. Задание 5.1 – подстановка

Выразим из первого уравнения системы (5.1.1) функцию y через x и производную x'

$$5y = 2x + 3 - x',$$
$$y = \frac{2x+3-x'}{5}. \tag{5.1.2}$$

Продифференцируем (5.1.2) по t

$$y' = \frac{2x'-x''}{5}. \tag{5.1.3}$$

Подставим (5.1.2) и (5.1.3) во второе уравнение системы (5.1.1)

$$y' = 5x - 6y + 1,$$
$$\frac{2x'-x''}{5} = 5x - 6\left(\frac{2x+3-x'}{5}\right) + 1,$$
$$2x' - x'' = 25x - 6(2x + 3 - x') + 5,$$

5.4. Задание 5.1 – уравнение

$$x'' - 2x' + 25x - 12x - 18 + 6x' + 5 = 0,$$
$$x'' + 4x' + 13x = 13. \qquad (5.1.4)$$

Получили неоднородное уравнение 2-го порядка,
разрешим однородное уравнение

$$x'' + 4x' + 13x = 0. \qquad (5.1.5)$$

Уравнению (5.1.5) соответствует характеристическое уравнение

$$k^2 + 4k + 13 = 0,$$
$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 = (\sqrt{36} \cdot \sqrt{-1})^2 = (6i)^2,$$
$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Так как корни комплексные, то решение однородного равнения запишется

5.5. Задание 5.1 – решение

$$x_{\text{одн.}} = e^{-2t}(C_1 \cdot cos3t + C_2 \cdot sin3t). \quad (5.1.5)$$

Частное решение уравнения (5.1.4) ищем в виде

$$x_{\text{частн.}} = A. \quad (5.1.6)$$

Тогда

$$x'_{\text{частн.}} = A' = 0, \quad (5.1.7)$$
$$x''_{\text{частн.}} = 0' = 0. \quad (5.1.8)$$

Подставим (5.1.6)-(5.1.8) в уравнение (5.1.4)

5.6. Задание 5.1 – общее решение

$$x'' + 4x' + 13x = 13,$$
$$0 + 4 \cdot 0 + 13 \cdot A = 13,$$
$$A = 1.$$

Тогда частное решение уравнения запишется

$$x_{\text{частн.}} = 1. \qquad (5.1.9)$$

Общее решение с учетом (5.1.5) и (5.1.9) имеет вид

$$x = x_{\text{одн.}} + x_{\text{частн.}} = e^{-2t}(C_1 \cdot cos3t + C_2 \cdot sin3t) + 1. \qquad (5.1.10)$$

Возьмем производную от (5.1.10)

5.7. Задание 5.1 – решение системы

$$x = e^{-2t}\left(C_1 \cdot cos3t + C_2 \cdot sin3t\right) + 1,$$
$$x' = -2e^{-2t}C_1cos3t - 3e^{-2t}C_1sin3t - 2e^{-2t}C_2sin3t + 3e^{-2t}C_2cos3t,$$
$$x' = e^{-2t}((3C_2 - 2C_1)cos3t - (3C_1 + 2C_2)sin3t). \qquad (5.1.11)$$

Подставим (5.1.10)-(5.1.11) в (5.1.2)

$$y = \frac{2x+3-x'}{5},$$
$$y = \frac{1}{5}(2 \cdot (e^{-2t}(C_1 \cdot cos3t + C_2 \cdot sin3t) + 1) + 3 - (e^{-2t}((3C_2 - 2C_1)cos3t - (3C_1 + 2C_2)sin3t))),$$
$$y = e^{-2t}\left(\frac{4C_1 - 3C_2}{5}cos3t + \frac{3C_1 + 4C_2}{5}sin3t\right) + 1.$$

Таким образом решение системы имеет вид

5.8. Задание 5.1 – решение системы

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}\,(C_1 \cdot cos3t + C_2 \cdot sin3t) + 1, \\ y(t) = e^{-2t}\left(\dfrac{4C_1 - 3C_2}{5} cos3t + \dfrac{3C_1 + 4C_2}{5} sin3t\right) + 1. \end{cases}$$

5.9. Задание 5.2 – метод Эйлера

Задание 5.2

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases} \qquad (5.2.1)$$

решить систему линейных дифференциальных уравнений (5.2.1) методом Эйлера.

5.10. Задание 5.2 – уравнение

Будем искать решение (5.2.1) в виде

$$x = \propto_1 e^{\lambda t},$$
$$y = \propto_2 e^{\lambda t}. \qquad (5.2.2)$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (5.2.3)$$

Решим уравнение (5.2.3)

$$(-2-\lambda)(3-\lambda)+4=0,$$
$$-6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2+4=0,$$
$$\lambda^2-\lambda-2=0,$$
$$D=1+8=3^2,$$

5.11. Задание 5.2 – решение системы

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Для определения $\propto_1$ и $\propto_2$ воспользуемся системой

$$\begin{cases} (-2-\lambda) \propto_1 + 4 \propto_2 = 0, \\ -\propto_1 + (3-\lambda) \propto_2 = 0. \end{cases}$$

В случае $\lambda_1 = 2$ получаем

$$\begin{cases} -4 \propto_{11} + 4 \propto_{21} = 0, \\ -\propto_{11} + \propto_{21} = 0, \end{cases}$$
$$\propto_{11} = \propto_{21}$$

Следовательно

5.12. Задание 5.2 – решение системы

$$x_1 = \propto_{11} e^{2t},$$
$$y_1 = \propto_{11} e^{2t}.$$

В случае $\lambda_2 = -1$ получаем

$$\begin{cases} -\propto_{12} + 4 \propto_{22} = 0, \\ -\propto_{12} + 4 \propto_{22} = 0, \end{cases}$$
$$\propto_{12} = 4 \propto_{22}.$$

Следовательно

$$x_2 = 4 \propto_{22} e^{-t},$$
$$y_2 = \propto_{22} e^{-t}.$$

Общее решение

5.13. Задание 5.2 – общее решение

$$x(t) = c_1 \propto_{11} e^{2t} + 4\, c_2 \propto_{22} e^{-t},$$
$$y(t) = c_1 \propto_{11} e^{2t} + c_2 \propto_{22} e^{-t}.$$

Или

$$x(t) = \mathrm{C}_1 e^{2t} + 4\, \mathrm{C}_2 e^{-t},$$
$$y(t) = \mathrm{C}_1 e^{2t} + \mathrm{C}_2 e^{-t}.$$

5.14. Задание 5.3 – матричный метод

Задание 5.3

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases} \qquad (5.3.1)$$

решить систему линейных дифференциальных уравнений (5.3.1) матричным методом.

5.15. Задание 5.3 – матрица

Запишем матрицу уравнения (5.3.1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Зададим определитель дифференциального уравнения
и найдем собственные значения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) - 35,$$
$$\lambda^2 + 4\lambda - 32 = 0,$$
$$D = 16 + 4 \cdot 32 = 12^2,$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 12}{2},$$
$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -8.$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 4$

5.16. Задание 5.3 – собственный вектор

$$\begin{pmatrix} -1-4 & -5 \\ -7 & -3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0,$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0,$$
$$-5V_{11} - 5V_{21} = 0,$$
$$V_{11} = -V_{21},$$
$$V_{21} = t, \qquad V_{11} = -t.$$

Тогда собственный вектор для для $\lambda_1 = 4$

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.3.2)$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_2 = -8$

$$\begin{pmatrix} -1+8 & -5 \\ -7 & -3+8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

5.17. Задание 5.3 – собственный вектор

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0,$$
$$7V_{12} - 5V_{22} = 0,$$
$$V_{12} = \frac{5}{7}V_{22},$$
$$V_{22} = t, \qquad V_{12} = \frac{5}{7}t.$$

Тогда собственный вектор для $\lambda_2 = -8$

$$V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.3.3)$$

С учетом (5.3.2)- (5.3.3) общее решение запишется

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 = C_1 e^{4t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-8t}\begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix},$$

5.18. Задание 5.3 – общее решение

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{4t} + \frac{5}{7} C_2 e^{-8t}, \\ y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-8t}. \end{cases}$$

5.19. Задание 5.4 – метод Лагранжа

Задание 5.4

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y + e^t \end{cases} \qquad (5.4.1)$$

решить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (5.4.1) методом Лагранжа.

5.20. Задание 5.4 – собственные

Запишем матрицу однородного уравнения (5.4.1)

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зададим определитель дифференциального уравнения
и найдем собственные значения

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(3-\lambda) + 12,$$
$$-12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 12,$$
$$\lambda^2 + \lambda = 0,$$
$$\lambda(\lambda + 1) = 0,$$
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1.$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_1 = 0$

5.21. Задание 5.4 – собственный вектор

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0,$$
$$-4V_{11} - 2V_{21} = 0,$$
$$V_{11} = -\frac{V_{21}}{2},$$
$$V_{21} = 2t, \qquad V_{11} = -t.$$

Тогда собственный вектор для для $\lambda_1 = 0$

$$V_1 = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (5.4.2)$$

Найдем собственный вектор для $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} -4+1 & -2 \\ 6 & 3+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

5.22. Задание 5.4 – собственный вектор

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0,$$
$$-3V_{12} - 2V_{22} = 0,$$
$$V_{12} = -\frac{2}{3}V_{22},$$
$$V_{22} = 3t, \qquad V_{12} = -2t.$$

Тогда собственный вектор для для $\lambda_2 = -1$

$$V_2 = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (5.4.3)$$

С учетом (5.4.2)- (5.4.3) общее решение запишется

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

5.23. Задание 5.4 – решение

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 - 2C_2e^{-t}, \\ y(t) = 2C_1 + 3C_2e^{-t}. \end{cases} \quad (5.4.4)$$

Заменим в (5.4.4) C_1 и C_2 на функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$, тогда (5.4.4) перепишется как

$$\begin{cases} x(t) = -C_1(t) - 2C_2(t)e^{-t}, \\ y(t) = 2C_1(t) + 3C_2(t)e^{-t}. \end{cases} \quad (5.4.5)$$

Производные (5.4.5) будут равны

$$\begin{cases} x(t)' = -C_1' - 2C_2'e^{-t} + 2C_2e^{-t}, \\ y(t)' = 2C_1' + 3C_2'e^{-t} - 3C_2e^{-t}. \end{cases} \quad (5.4.6)$$

Подставляем выражения (5.4.4), (5.4.6) в исходную неоднородную систему (5.4.1)

5.24. Задание 5.4 – подстановка

$$\begin{cases} -C_1' - 2C_2'e^{-t} + 2C_2e^{-t} = 4C_1 + 8C_2e^{-t} - 4C_1 - 6C_2e^{-t} + 1, \\ 2C_1' + 3C_2'e^{-t} - 3C_2e^{-t} = -6C_1 - 12C_2e^{-t} + 6C_1 + 9C_2e^{-t} + e^t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1' - 2C_2'e^{-t} = 1, \\ 2C_1' + 3C_2'e^{-t} = e^t, \end{cases} \tag{5.4.7}$$

Умножим первое уравнение (5.4.7) на 2 и сложим со вторым

$$-4C_2'e^{-t} + 3C_2'e^{-t} = 2 + e^t,$$
$$-C_2'e^{-t} = 2 + e^t,$$
$$C_2' = -2e^t - e^{2t}. \tag{5.4.8}$$

Подставим (5.4.8) в первое уравнение (5.4.7)

$$C_1' = -2e^{-t}(-2e^t - e^{2t}) - 1,$$

5.25. Задание 5.4 – интегрируем

$$C_1' = 4 + 2e^t - 1,$$
$$C_1' = 2e^t + 3. \qquad (5.4.9)$$

Проинтегрируем (5.4.8)

$$\mathrm{C}_2 = -\int (2e^t + e^{2t})dt,$$

$$\mathrm{C}_2 = -(2e^t + {}^{e^{2t}}/_2 + A_1).$$

Проинтегрируем (5.4.9)

$$\mathrm{C}_1 = \int (2e^t + 3)dt,$$

$$\mathrm{C}_1 = 2e^t + 3t + A_2.$$

Тогда решение (5.4.4) перепишется в виде

5.26. Задание 5.4 – общее решение

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 - 2C_2e^{-t}, \\ y(t) = 2C_1 + 3C_2e^{-t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -2e^t - 3t - A_2 - 2e^{-t}\left(2e^t + {e^{2t}}/{2} + A_1\right) \\ y(t) = 4e^t + 6t + 2A_2 + 3e^{-t}\left(2e^t + {e^{2t}}/{2} + A_1\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -2e^t - 3t - A_2 - 4 - e^t - 2A_1e^{-t}, \\ y(t) = 4e^t + 6t + 2A_2 + 6 + \dfrac{3}{2}e^t + 3A_1e^{-t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -3e^t - 2A_1e^{-t} - 3t - A_2 - 4, \\ y(t) = \dfrac{11}{2}e^t + 3A_1e^{-t} + 6t + 2A_2 + 6. \end{cases}$$

5.27. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 5.4

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases} \qquad (5.4.1)$$

решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений (5.4.1) методом исключения.

Задание 5.5

$$\frac{dx}{dt} = -x - 5y, \qquad \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \qquad (5.5.1)$$

решить систему линейных дифференциальных уравнений (5.5.1) методом Эйлера.

5.28. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 5.6

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases} \qquad (5.6.1)$$

решить систему линейных дифференциальных уравнений (5.6.1) матричным методом.

Задание 5.7

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{1}{cost}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \qquad (5.7.1)$$

решить систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений (5.7.1) методом Лагранжа.

6.1. Практическая работа 6

Моделирование автономных динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями:

- определение точек покоя автономной динамической системы, заданной дифференциальным уравнением;
- определение качественно эквивалентных дифференциальных уравнений динамической системы.

6.2. Задание 6.1 – точки покоя

Задание 6.1

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+5) \qquad (6.1.1)$$

определить точки покоя
дифференциального уравнения (6.1.1).

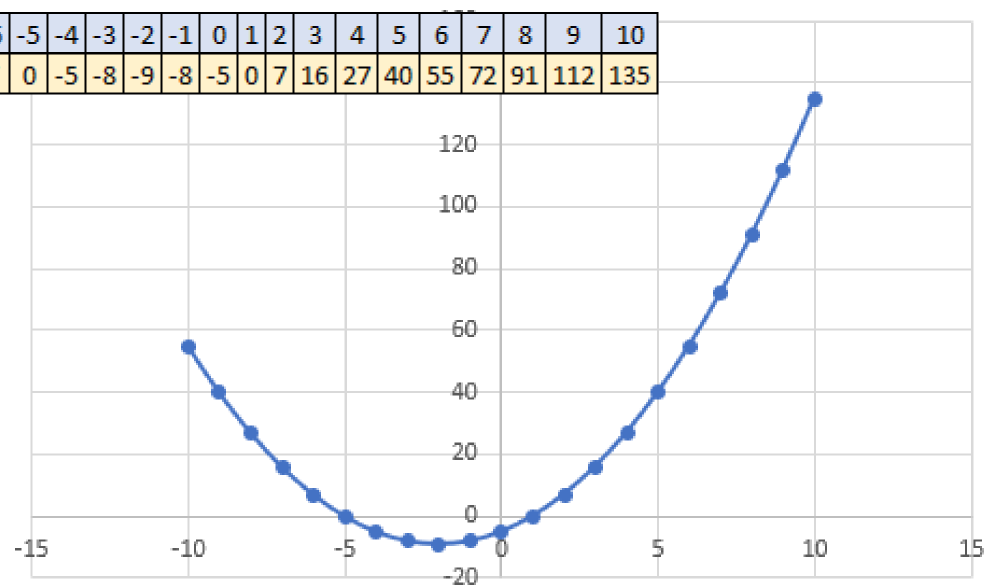
6.3. Задание 6.1 – график

Найдем точки покоя (6.1.1)

$$(x-1)(x+5)=0, \quad (6.1.2)$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -5.$$

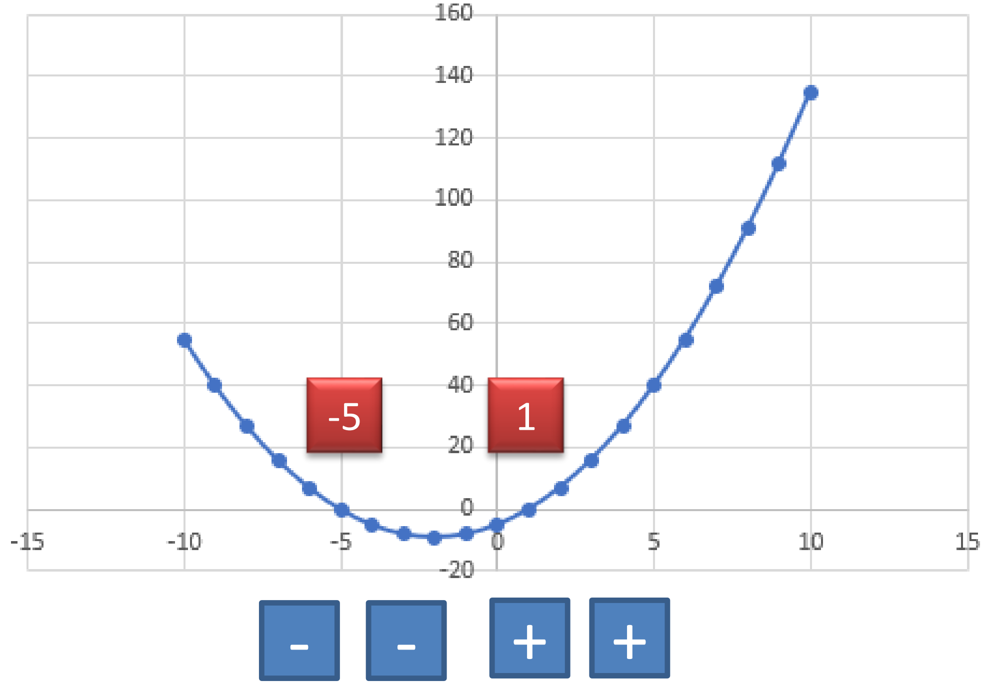
Построим график функции (6.1.2)

X	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	55	40	27	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	27	40	55	72	91	112	135



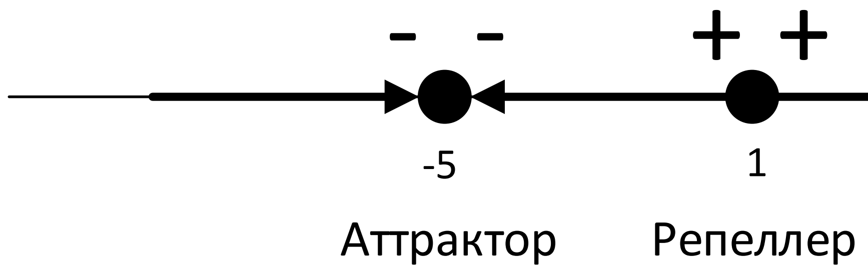
6.4. Задание 6.1 – возрастание

Определим области возрастания и убывания графика (6.1.2)
вблизи точек покоя



Настроим фазовый портрет графика (6.1.2)
и определим типы точек

6.5. Задание 6.1 – аттрактор и репеллер



6.6. Задание 6.2 – точки покоя

Задание 6.2

$$\frac{dx}{dt} = -(x-3)x \qquad (6.2.1)$$

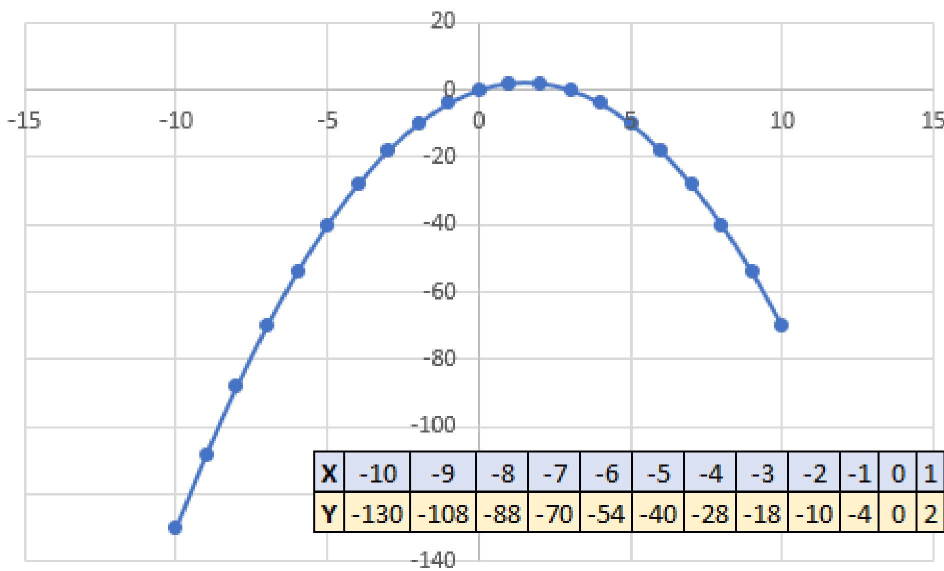
определить точки покоя
дифференциального уравнения (6.2.1).

6.7. Задание 6.2 – график

Найдем точки покоя (6.2.1)

$$-(x-3)x = 0, \qquad (6.2.2)$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 0.$$

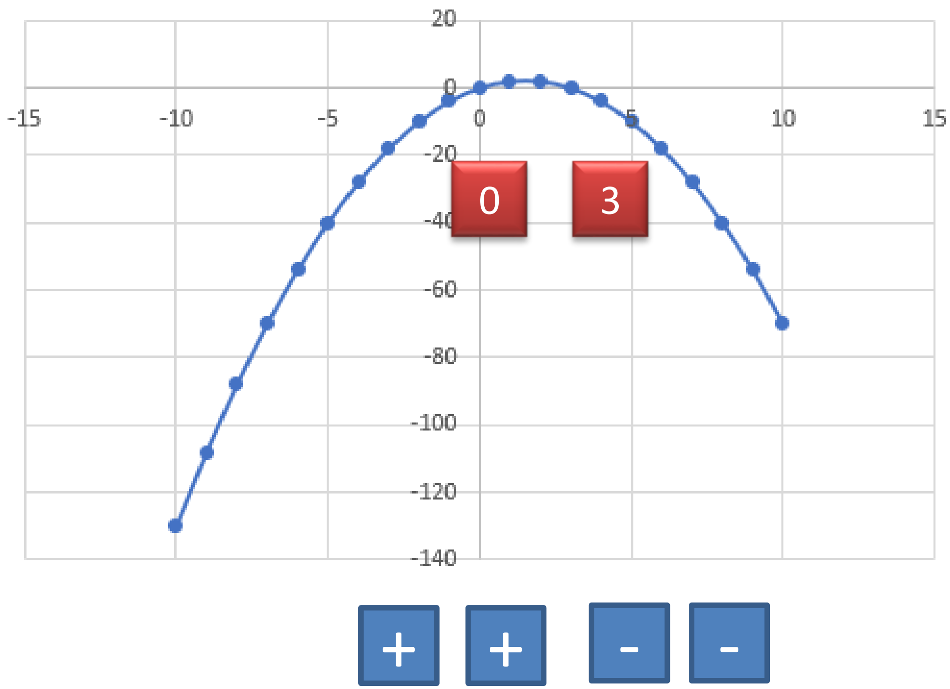
Построим график функции (6.2.2)



X	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-130	-108	-88	-70	-54	-40	-28	-18	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10	-18	-28	-40	-54	-70

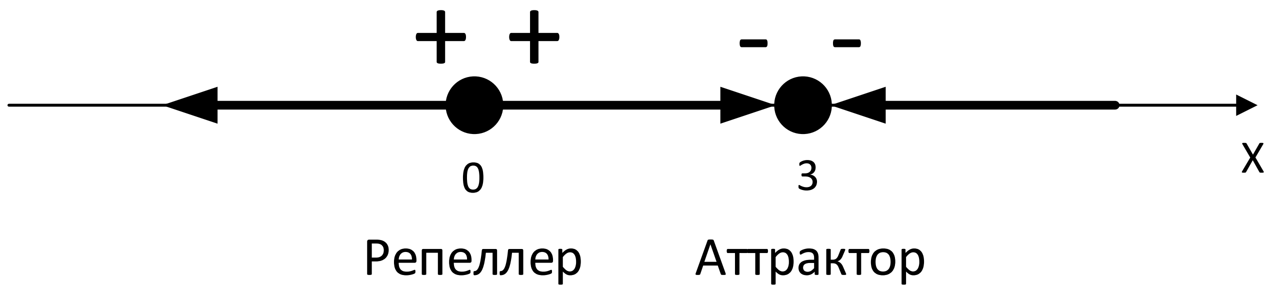
6.8. Задание 6.2 – возрастание

Определим области возрастания и убывания графика (6.2.2)
вблизи точек покоя



Настроим фазовый портрет графика (6.2.2)
и определим типы точек

6.9. Задание 6.2 – аттрактор и репеллер



6.10. Задание 6.3 – эквивалентность

Задание 6.3

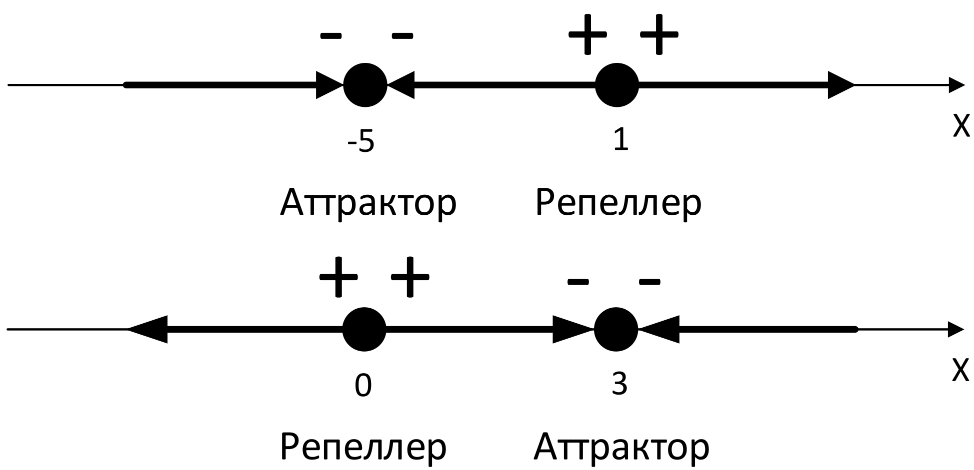
$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+5) \qquad (6.3.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -(x-3)x \qquad (6.3.2)$$

определить являются ли дифференциальные уравнения (6.3.1) - (6.3.2) качественно эквивалентными.

6.11. Задание 6.3 – портреты

Построим фазовые портреты графиков (6.3.1)-(6.3.2)
и определим типы точек покоя



Количество точек совпадает, характер одинаков, однако расположение различно: уравнения не являются качественно эквивалентными.

6.12. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 6.4

$$x' = (x^3 - 1)x \qquad (6.4.1)$$

определить точки покоя
дифференциального уравнения (6.4.1).

Задание 6.5

$$x' = (x - 1)(x + 4) \qquad (6.5.1)$$

определить точки покоя
дифференциального уравнения (6.5.1).

6.13. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 6.6

$$\frac{dx}{dt} = (x^3-1)x \qquad (6.6.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)(x+4) \qquad (6.6.2)$$

определить являются ли дифференциальные уравнения (6.6.1) - (6.6.2) качественно эквивалентными.

7.1. Практическая работа 7

Моделирование автономных динамических систем, заданных системой дифференциальных уравнений:

- нахождение точек покоя автономной динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений;
- определение устойчивости автономной динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений, на основе метода функций Ляпунова;
- определение устойчивости автономной динамической системы, заданной системой дифференциальных уравнений, по первому приближению.

7.2. Задание 7.1 – точка покоя

Задание 7.1

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y \qquad (7.1.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -6x - 5y$$

исследовать особые точки и построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (7.1.1).

7.3. Задание 7.1 – корни

Запишем матрицу однородного уравнения (7.1.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Зададим определитель дифференциального уравнения
и найдем корни

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda)+18,$$
$$-5+5\lambda-\lambda+\lambda^2+18,$$
$$\lambda^2+4\lambda+13=0,$$
$$D=16-4\cdot 13=-36,$$
$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm 6i}{2},$$
$$\lambda_1=-2+3i,\ \lambda_2=-2-3i.$$

Так как получили комплексные решения, точка покоя есть фокус.

7.4. Задание 7.1 – вектор

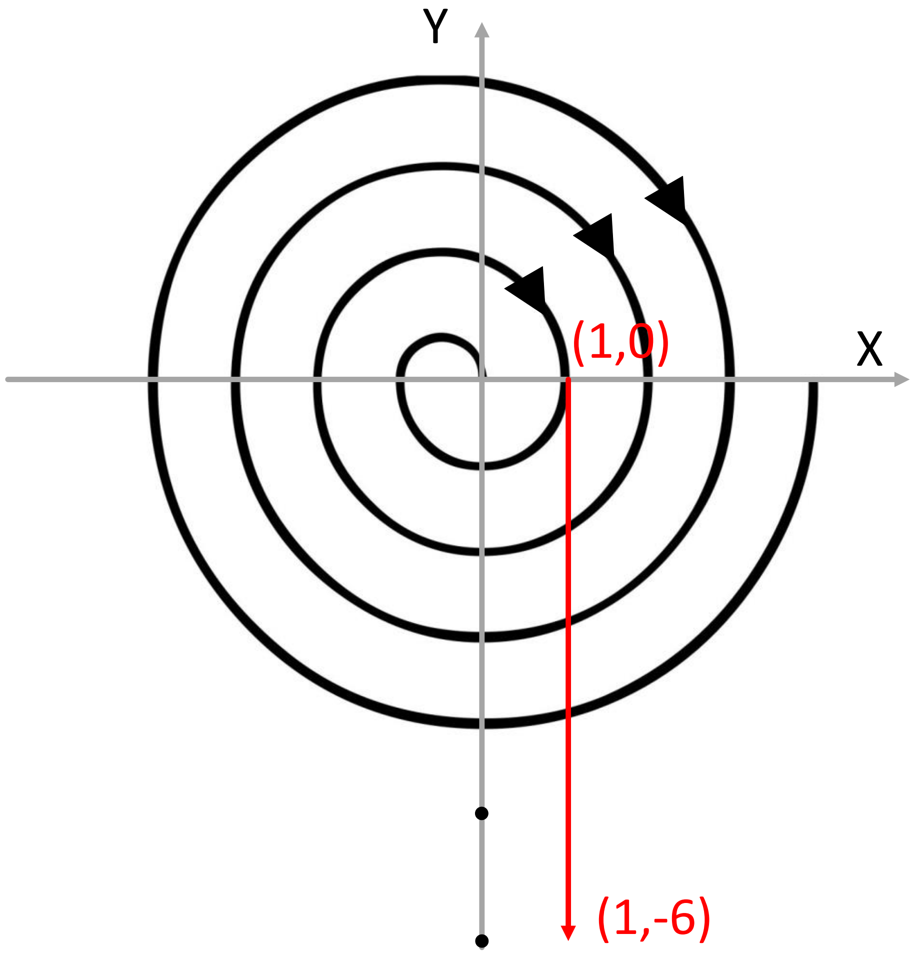
Так как получили действительные части решения отрицательные, точка покоя устойчива. Определим направление закручивания спиралей

$$A = (1, 0),$$
$$\dot{x}(1, 0) = 1,$$
$$\dot{y}(1, 0) = -6.$$

Согласно вектору скорости (1,0) и (1,-6) спирали закручиваются по часовой стрелке.

Фазовый портрет условно можно привести следующим образом

7.5. Задание 7.1 – портрет



Задание 7.2

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \qquad (7.2.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y^3,$$
$$V = x^2 + y^2$$

исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений (7.2.1) методом функций Ляпунова.

7.7. Задание 7.2 – корни

Воспользуемся формулой

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Тогда производная от функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3),$$
$$\frac{dV}{dt} = 2xy - 2x^4 - 2xy - 6y^4,$$
$$\frac{dV}{dt} = -2(x^4 + 3y^4).$$

Найденная производная знакопостоянна и противоположна исходной функции Ляпунова, следовательно точка покоя $O(0,0)$ асимптотически устойчива.

Задание 7.3

$$\frac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \qquad (7.3.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 3y + 5x^4 + y^5$$

исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений (7.3.1) по первому приближению.

7.9. Задание 7.3 – корни

Запишем матрицу однородной части уравнения (7.3.1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Зададим определитель дифференциального уравнения
и найдем корни

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-3-\lambda) - 2,$$

$$3 + 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0,$$

$$D = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{3},\ \lambda_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Так как действительные части корней уравнения отрицательны,
следовательно точка покоя $O(0,0)$ асимптотически устойчива.

7.10. Задания для самоконтроля (1 из 2)

Задание 7.4

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases} \qquad (7.4.1)$$

исследовать особые точки и построить фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (7.4.1).

Задание 7.5

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3y}{2}, \qquad V = x^2 + 2y^2 \quad (7.5.1)$$

исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений методом функций Ляпунова (7.5.1).

7.11. Задания для самоконтроля (2 из 2)

Задание 7.6

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \qquad \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5, \qquad V = x^4 - y^4 \quad (7.6.1)$$

исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений методом функций Ляпунова (7.6.1).

Задание 7.7

$$\frac{dx}{dt} = y + 3x^2 + 2y^2, \qquad (7.7.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x - y + xy$$

исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ системы дифференциальных уравнений (7.7.1) по первому приближению.

8.1. Лабораторная работа 1

Моделирование динамических систем, заданных системой дифференциальных уравнений, в среде MathCad:

- нахождение собственных значений и собственных векторов;
- определение векторного поля;
- построение фазового портрета и графика решений для различных начальных значений.

8.2. Лабораторная работа 1 – задание

Задание 8.1

$$\frac{dx}{dt} = ax + by$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \qquad (8.1.1)$$

для системы дифференциальных уравнений (8.1.1) необходимо в MathCad: а) найти собственные значения; б) определить тип точки покоя; в) построить векторное поле; г) для 4-х произвольных начальных значений построить фазовый портрет.

8.3. Лабораторная работа 1 – значения

Определим значения коэффициентов для a, b, c, d из (8.1.1) для варианта № 45.
Зададим 2-а случайных числа в интервале [-45, 45], тогда

$$\text{Случайное число } 1 = -5;$$
$$\text{Случайное число } 2 = 12;$$

Тогда

$$a = -(\text{Случайное число } 1 - \text{вариант №}) = -(-5 - 45) = 50;$$
$$b = \frac{(\text{Случайное число } 1 - \text{Случайное число } 2)}{\text{вариант №}} =$$
$$= \frac{(-5-12)}{45} = -0.38;$$
$$c = \text{вариант №} = 45;$$
$$d = -(\text{вариант №} - \text{Случайное число } 2) = -(45 - 12) = -33.$$

Исходное уравнение перепишется в виде

8.4. Лабораторная работа 1 – уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 50x - 0.38y$$
$$\frac{dy}{dt} = 45x - 33y \qquad (8.1.2)$$

Рассчитаем собственные значения в MathCad

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 50 & -0.38 \\ 45 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 49.793 \\ -32.793 \end{pmatrix}$$

Найденным собственным значениям соответствует особая точка вида седло. Далее построим векторное поле

8.5. Лабораторная работа 1 – поле

$$F1(X, Y) := 50 \cdot X - 0.38Y$$

$$F2(X, Y) := 45X - 33Y$$

$$i := 1..20$$

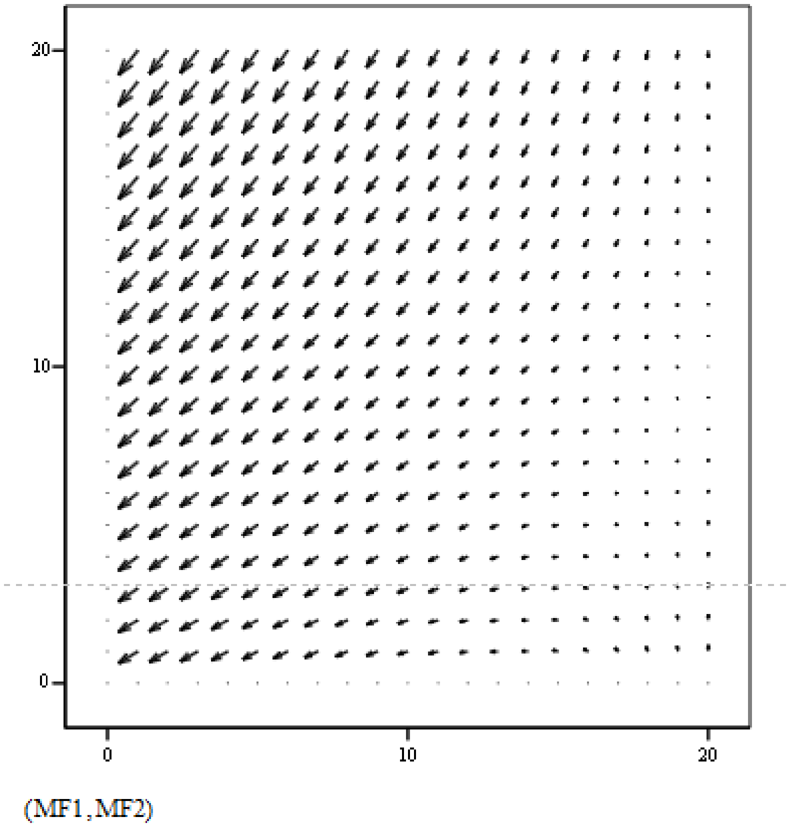
$$j := 1..20$$

$$U_i := -2 + i \cdot \frac{2}{20}$$

$$V_j := -1 + j \cdot \frac{2}{20}$$

$$MF1_{i,j} := F1\left(U_i, V_j\right)$$

$$MF2_{i,j} := F2\left(U_i, V_j\right)$$



8.6. Лабораторная работа 1 – портрет

Зададим фазовый портрет для любых 4-х пар начальных значений на интервале [0,1] с шагом приращения 100 единиц

$$D(t,Y) := \begin{pmatrix} 50\,Y_1 - 0.38Y_2 \\ 45\cdot Y_1 - 33\,Y_2 \end{pmatrix}$$

$$Y3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y3 := \mathrm{rkfixed}(Y3, 0, 1, 100, D)$$

$$Y5 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y5 := \mathrm{rkfixed}(Y5, 0, 1, 100, D)$$

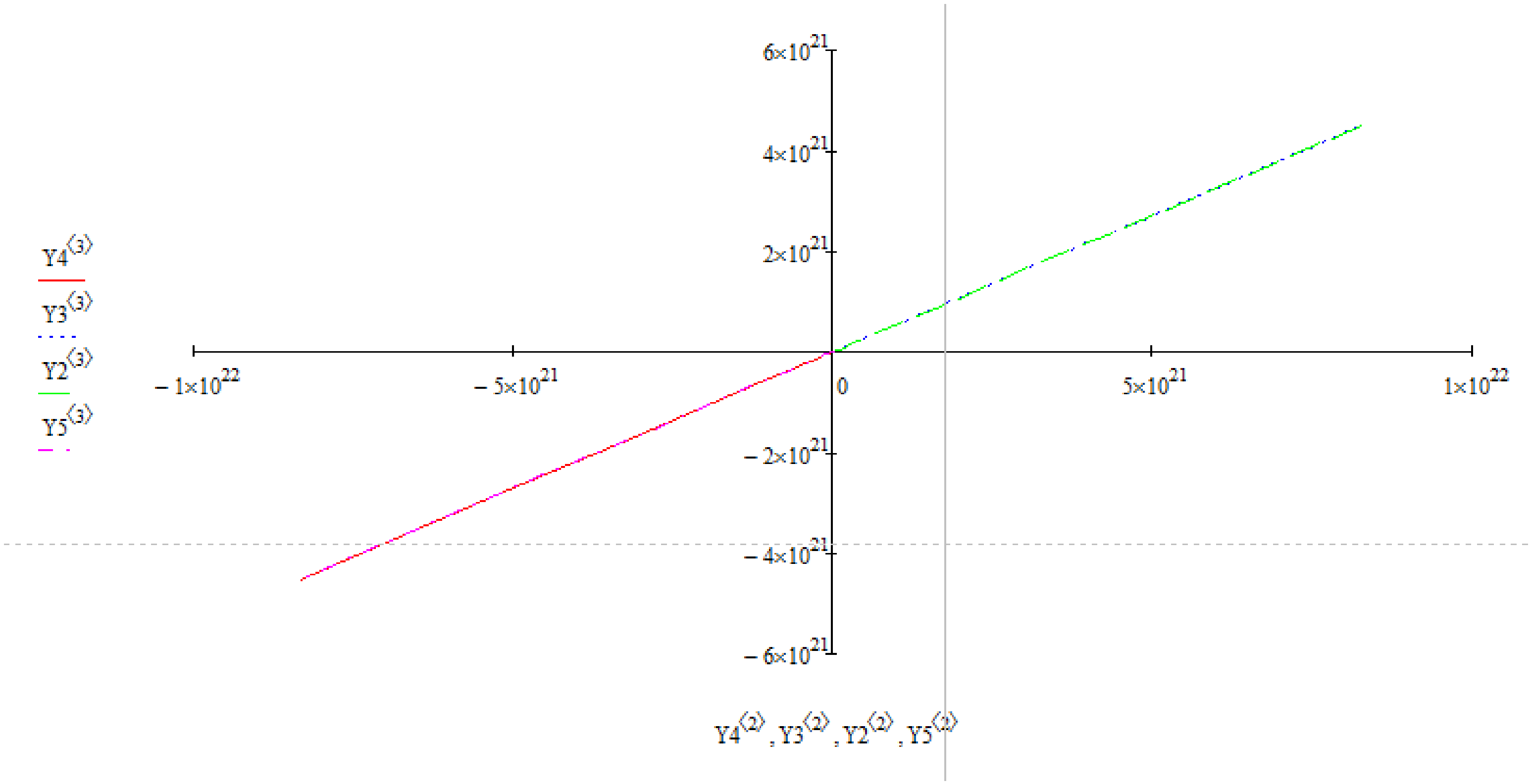
$$Y4 := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Y4 := \mathrm{rkfixed}(Y4, 0, 1, 100, D)$$

$$Y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Y2 := \mathrm{rkfixed}(Y2, 0, 1, 100, D)$$

8.7. Лабораторная работа 1 – портрет



Задание 8.2

Для определенного варианта №, заданного преподавателем, задайте случайным образом 2-а числа в интервале [-45, 45]: Случайное число 1 и Случайное число 2.

Рассчитайте коэффициенты по формулам ниже:

$$a = -(\text{Случайное число 1} - \text{вариант №});$$

$$b = \frac{(\text{Случайное число 1} - \text{Случайное число 2})}{\text{вариант №}};$$

$$c = \text{вариант №};$$

$$d = -(\text{вариант №} - \text{Случайное число 2}).$$

для системы дифференциальных уравнений (8.1.1) необходимо в MathCad или любом другом программного аналоге: а) найти собственные значения; б) определить тип точки покоя; в) построить векторное поле; г) для 4-х произвольных начальных значений построить фазовый портрет.

9.1. Лабораторная работа 2

Моделирование динамической системы Лоренца в среде MathCad:

- изменение начальных параметров системы;
- определение стационарных состояний;
- построение фазового портрета и графика решений.

9.2. Лабораторная работа 2 – задание

Задание 9.1

$$\frac{dx}{dt} = -qx + qy$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \qquad (9.1.1)$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

для системы Лоренца (9.1.1) необходимо в MathCad:
а) изменяя параметр *r*, определить стационарные состояния системы;
б) построить фазовый портрет и график решения для определенных состояний.

9.3. Лабораторная работа 2 – значения

Определим значения коэффициентов для b, q из (9.1.1) для варианта № 45

$$q = \text{вариант №}/2 = 45/2 = 22.5;$$
$$b = \text{вариант №}/3 = 45/3 = 15;$$

Зададим начальные значения x, y, z

$$x(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №} - 0.01 = 0.01 \cdot 45 - 0.01 = 0.44;$$
$$y(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №} = 0.01 \cdot 45 = 0.45;$$
$$z(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №} + 0.01 = 0.01 \cdot 45 + 0.01 = 0.46.$$

Перепишем исходное уравнение (9.2.1), используя найденные значения

9.4. Лабораторная работа 2 – формула

$$\frac{dx}{dt} = -22.5x + 22.5y$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \qquad (9.1.2)$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - 15z$$

При условии

$$x(0) = 0.44;$$
$$y(0) = 0.45;$$
$$z(0) = 0.46.$$

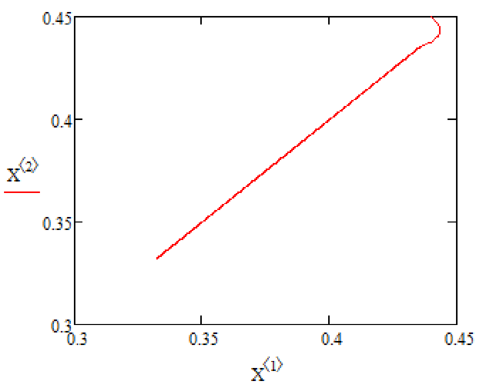
Определим стационарные состояния при изменении параметра *r* в [0,600] на интервале 0, …, 30 с приращением 2000, построив при этом фазовый портрет и график решения.

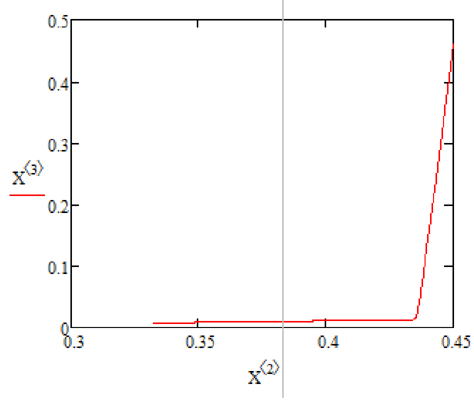
9.5. Лабораторная работа 2 – 0 до 1

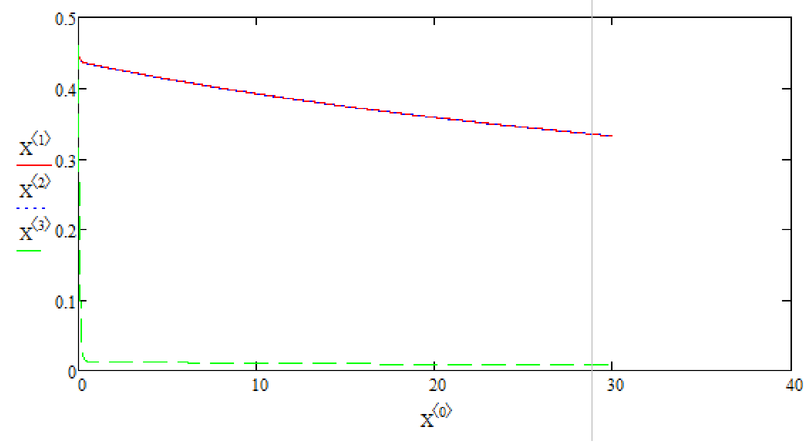
$r \in [0, 1]$ стационарные точки отсутствуют

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t, x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$





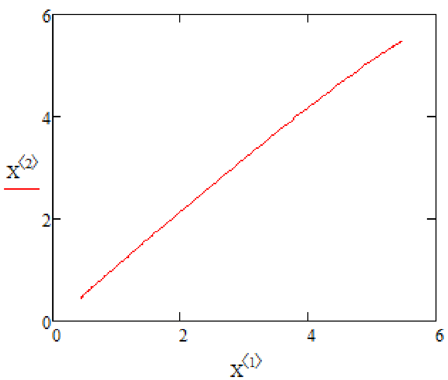


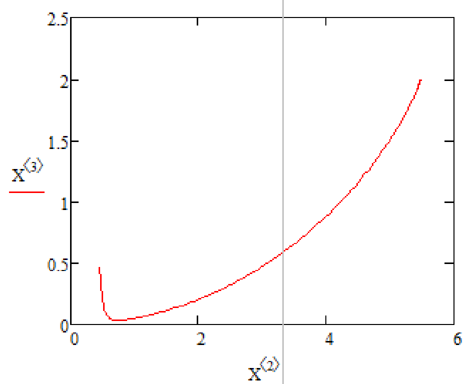
9.6. Лабораторная работа 2 – 1 до 3

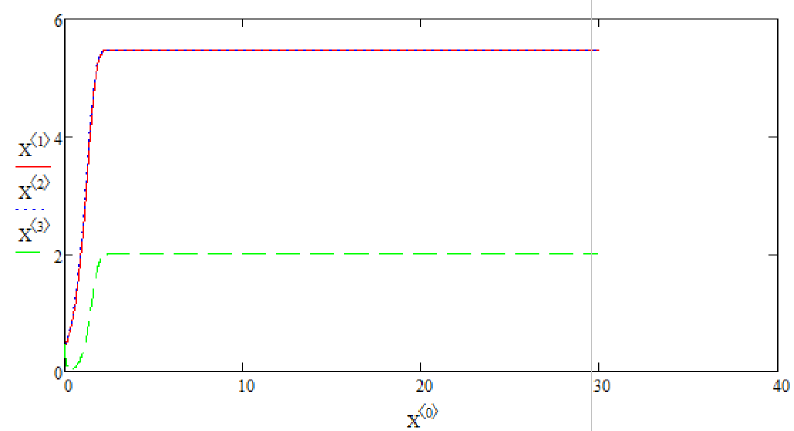
$r \in (1, 3]$ присутствует 2-а устойчивых узла

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$





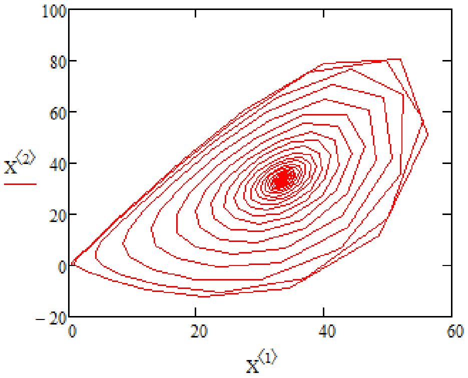


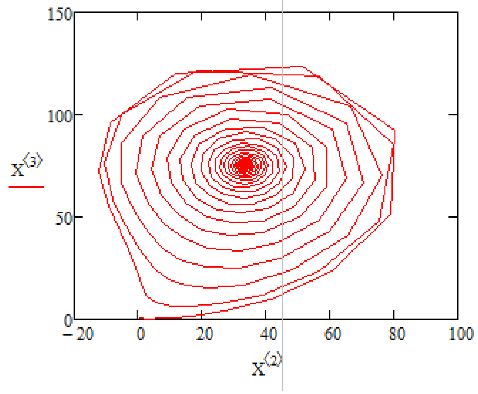
9.7. Лабораторная работа 2 – 3 до 76

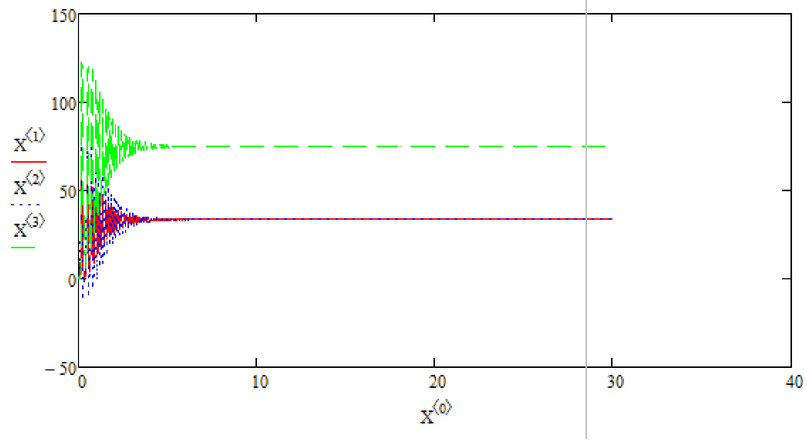
$r \in (3, 76]$ существует устойчивый фокус

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 76 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$





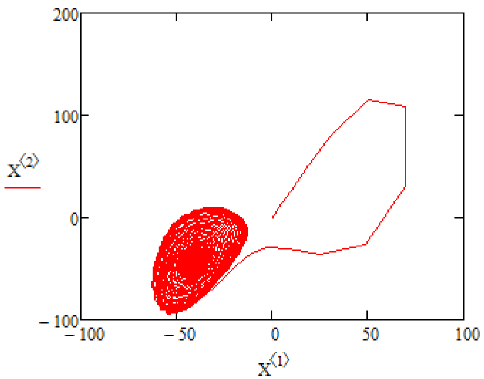


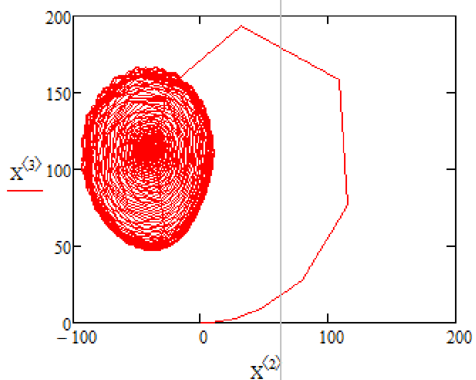
9.8. Лабораторная работа 2 – 76 до 113

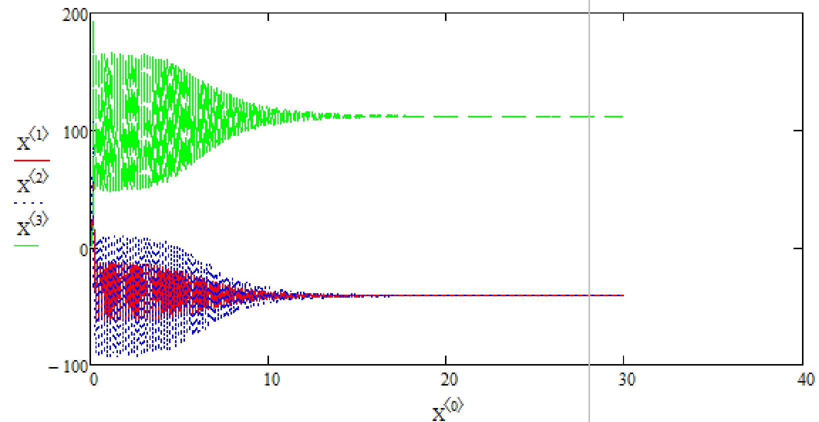
$r \in (76, 113]$ переход в соседнюю область и существование устойчивого фокуса

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 113 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$





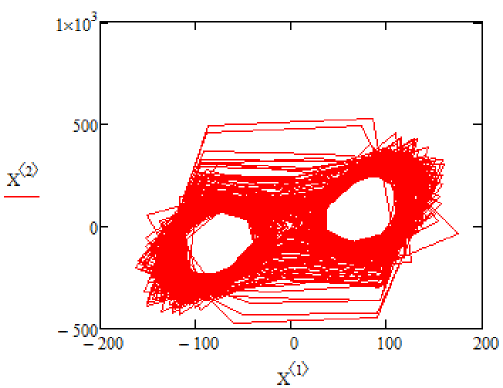


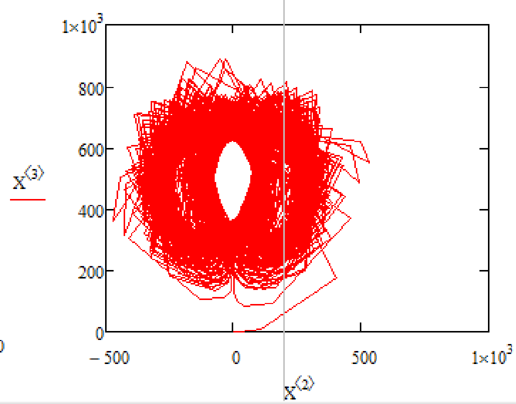
9.9. Лабораторная работа 2 – 113 до 597

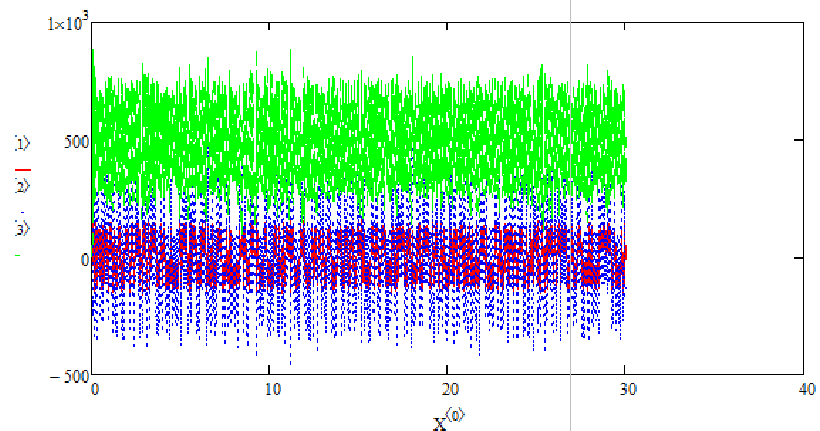
$r \in (113, 597]$ состояние хаоса

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 538 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -q \cdot x_0 + q \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_1 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$





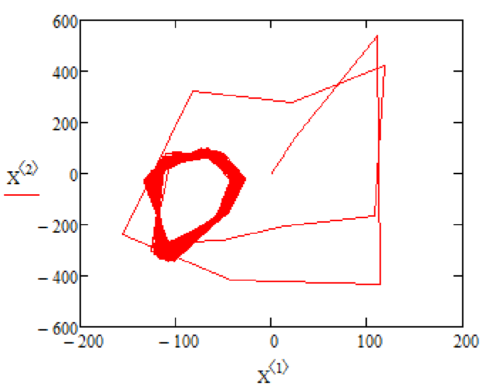


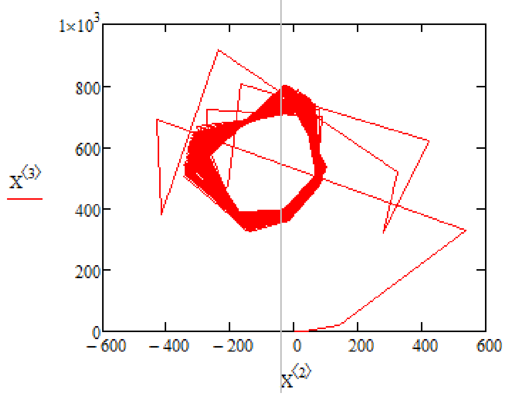
9.10. Лабораторная работа 2 – 597 до 600

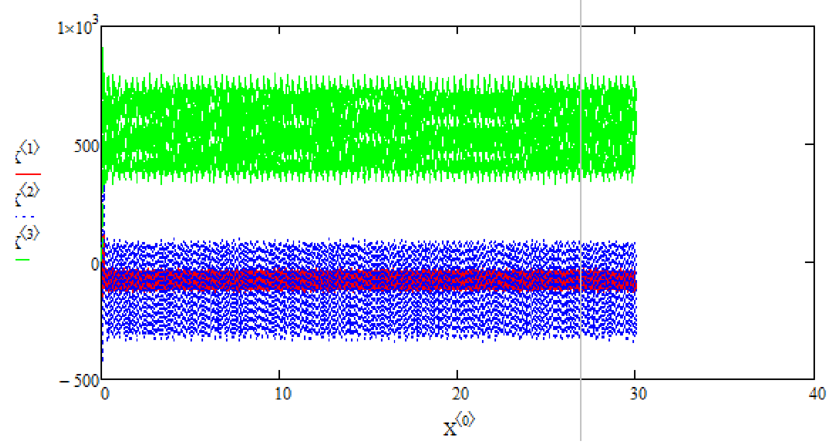
$r \in (597, 600]$ образование предельного цикла

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 22.5 \\ 598 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.45 \\ 0.46 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -q\cdot x_0 + q\cdot x_1 \\ r\cdot x_0 - x_1 - x_0\cdot x_2 \\ x_0\cdot x_1 - b\cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 30, 2000, F)$$







9.11. Задания для самоконтроля

Задание 9.2

Для определенного варианта №, заданного преподавателем, рассчитайте коэффициенты по формулам ниже:

$$q = \text{вариант №}/2;$$

$$b = \text{вариант №}/3.$$

Задайте начальные значения параметров согласно формуле:

$$x(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №} - 0.01;$$

$$y(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №};$$

$$z(0) = 0.01 \cdot \text{вариант №} + 0.01.$$

для системы Лоренца (9.1.1) необходимо в MathCad или другом программном аналоге: а) изменяя параметр r, определить стационарные состояния системы; б) построить фазовый портрет и график решения для определенных состояний.

Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Лань, 2003. – 816 с.