РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 5. ТОЧКИ ПОКОЯ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

1. Оглавление

2. Автономные дифференциальные уравнения

Автономное дифференциальное уравнение

если его правая часть f не зависят явно от t

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{1}$$

Решение уравнения (1) удобнее изображать на оси X, чем на плоскости t, x. Если $f(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$, то на этом интервале рисуется стрелка, показывающая направление изменения x. Если

$f(c) = 0$, то решение

$$x(t) \equiv c \tag{2}$$

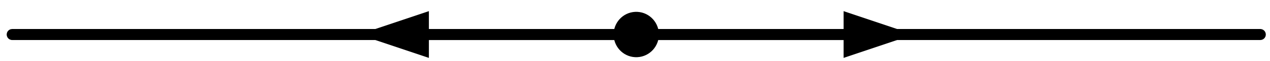
изображается точкой $x = \text{c}$.

Неподвижная точка дифференциального уравнения

для решения (2), так как $x = \text{c}$ для всех значений t.

2.1. Фазовый портрет

Фазовый портрет
Геометрическое изображение качественного поведения решения уравнения (1), где ось x – фазовая прямая, $x(t)$ – фазовая точка.



$$x = c$$

2.2. Убывающая функция

Убывающая функция

в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, т.е. должны выполняться условия

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1) \qquad (3)$$

или

$$\text{если } x_2 < x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1).$$

Возрастающая функция

в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е. должны выполняться условия

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1) \qquad (4)$$

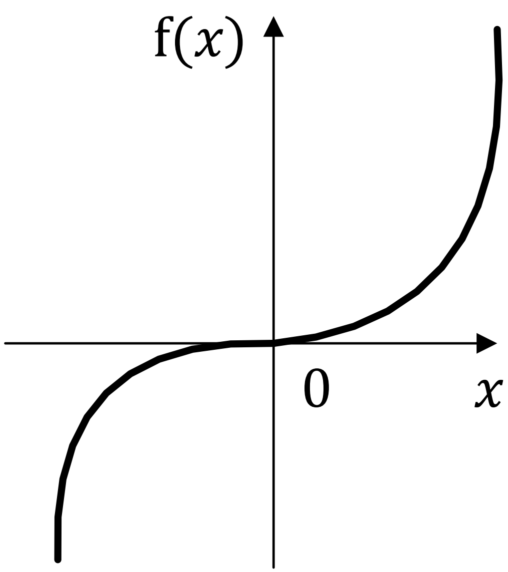
или

$$\text{если } x_2 < x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1).$$

2.3. Отражение возрастающей и убывающей функции на фазовом портрете (1 из 2)

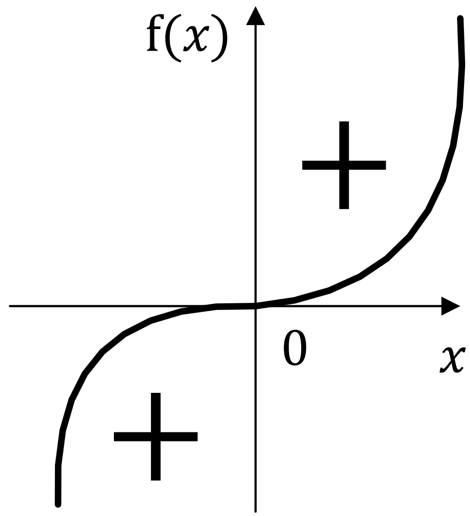
Если функция $f(x)$ вблизи стационарной точки $x = \text{с}$ является убывающей, то направление стрелки на фазовом портрете рисуется к неподвижной точке, в противном случае от точки.

Условно будем обозначать возрастающую функцию знаком «+», а убывающую «-». Рассмотрим пример, пусть задан график функции и стационарная точка в начале координат.

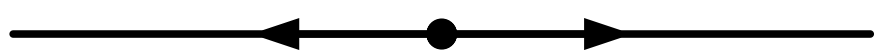


2.3. Отражение возрастающей и убывающей функции на фазовом портрете (2 из 2)

Обозначим области возрастания и убывания функции знаками «+» и «-» соответственно.



Построим фазовый портрет согласно введенному обозначению, где стрелки будут направлены от стационарной точки в виду возрастания функции слева и справа от точки покоя.



$x = 0$

2.4. Виды точек покоя дифференциального уравнения

Аттрактор

Шунт

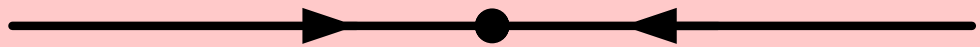
Репеллер

Виды точек покоя

2.5. Аттрактор

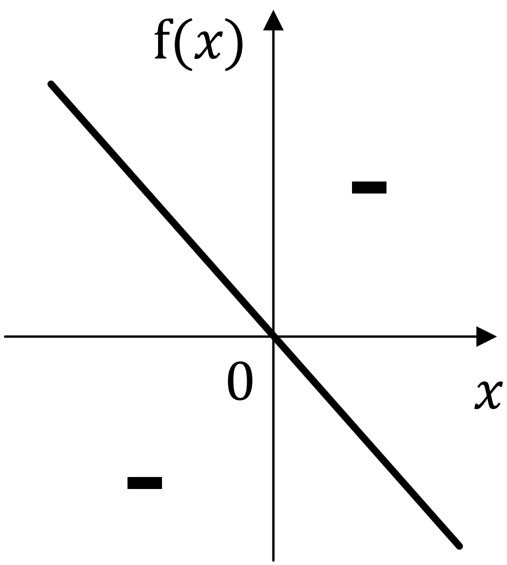
Аттрактор

устойчивая стационарная точка с фазовым портретом



$$x = \text{c}$$

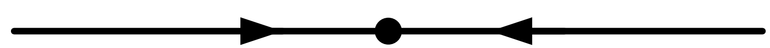
Пример



Задано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax, a < 0.$$

Найдем точки покоя из $ax = 0$, далее построим график функции, определим области возрастания и убывания и построим фазовый портрет.

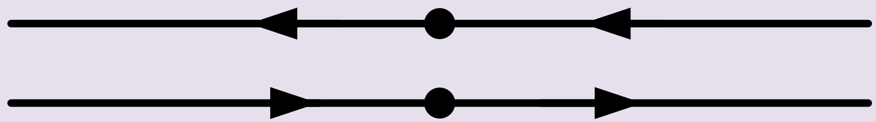


$$x = 0$$

2.6. Шунт

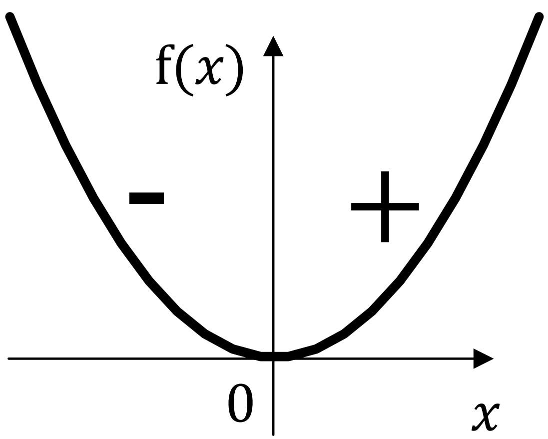
Шунт

неустойчивая стационарная точка с фазовым портретом



$x = c$

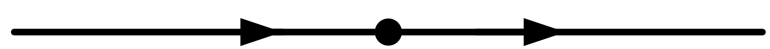
Пример



Задано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

Найдем точки покоя из $x^2 = 0$, далее построим график функции и фазовый портрет.

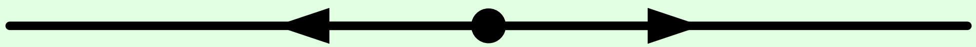


$x = 0$

2.7. Репеллер

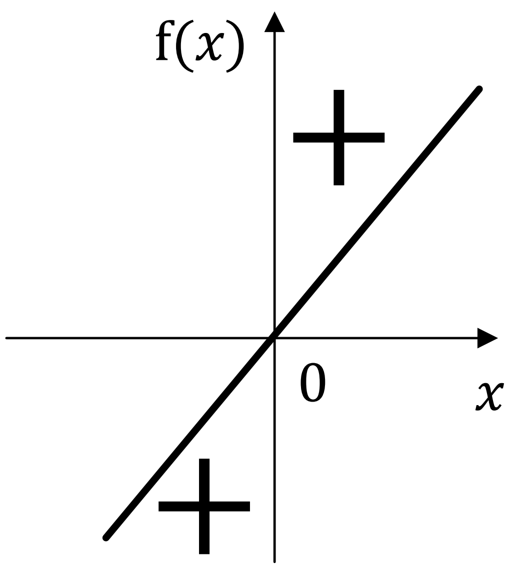
Репеллер

неустойчивая стационарная точка с фазовым портретом



$x = c$

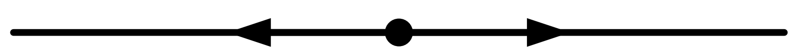
Пример



Задано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax, a > 0.$$

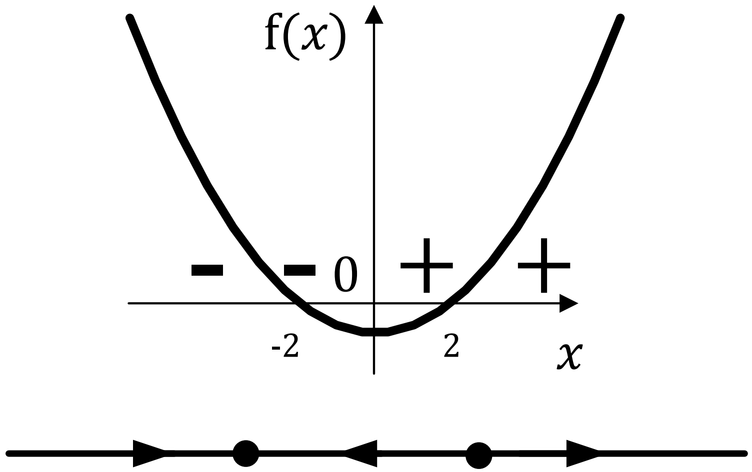
Найдем точки покоя из $ax = 0$, далее построим график функции, определим области возрастания и убывания и построим фазовый портрет.



$x = 0$

2.8. Качественно эквивалентные дифференциальные уравнения

Качественно эквивалентные уравнения
вида (1), если они имеют равное количество стационарных точек одинакового вида, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой.



x = -2 Аттрактор x = 2 Репеллер x = -5 Аттрактор x = 1 Репеллер

3. Автономная система дифференциальных уравнений

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2, \dots, n. \qquad (5)$$

При $n = 2$ можно свести систему (5) к линейной однородной системе уравнений с постоянными коэффициентами, например, вида

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \qquad (6)$$

Характер поведения фазовых траекторий системы (6) на фазовой плоскости определяют корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Построение фазового портрета на плоскости ведется согласно схеме, приведенной далее.

3.1. Схема построения фазового портрета

Схема построения фазового портрета
включает следующие шаги: 1. определить точки покоя (начало координат системы вида (5) всегда будет являться стационарной точкой); 2. записать характеристическое уравнение вида (7) и найти корни λ_1 и λ_2; 3. определить тип точки покоя на основе найденных корней; 4. начертить фазовый портрет, строя при необходимости вектор скорости или вычисляя уравнения прямых; 5. определить устойчивость стационарных точек и изобразить стрелками на фазовым портрете направление движения фазовых траекторий.

Тип точки покоя определяется в зависимости от значений корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (7). Возможны следующие случаи.

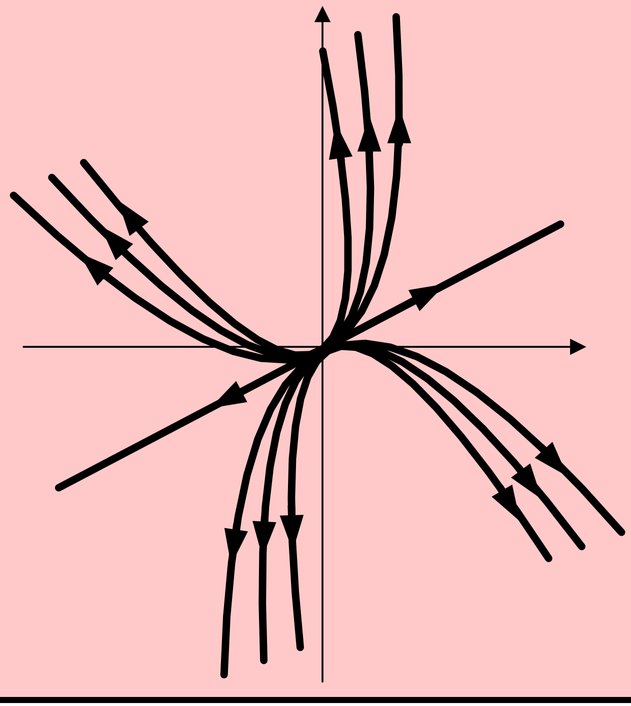
3.2. Узел (1 из 4)

Узел

при

$$\lambda_1, \lambda_2 \in R,$$
$$\lambda_1 \neq \lambda_2,$$
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, т.е. ($\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$),

представляет из себя фазовый портрет, например, вида



3.2. Узел (2 из 4)

Способ построения фазового портрета

Возьмем меньшее по модулю λ, например, λ_1, и подставим в уравнение (7)

$$\begin{vmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Найдем решение системы (6)

$$\begin{cases} (a-\lambda_1)x + by = 0, \\ cx + (d-\lambda_1)y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Получим уравнение прямой, сложив уравнения

$$(a-\lambda_1+c)x + (d-\lambda_1+b)y = 0,$$

$$x = y\frac{(\lambda_1-b-d)}{(a-\lambda_1+c)}. \tag{10}$$

3.2. Узел (3 из 4)

На фазовой плоскости строим прямую, заданную уравнением (10), проходящую через точку покоя.

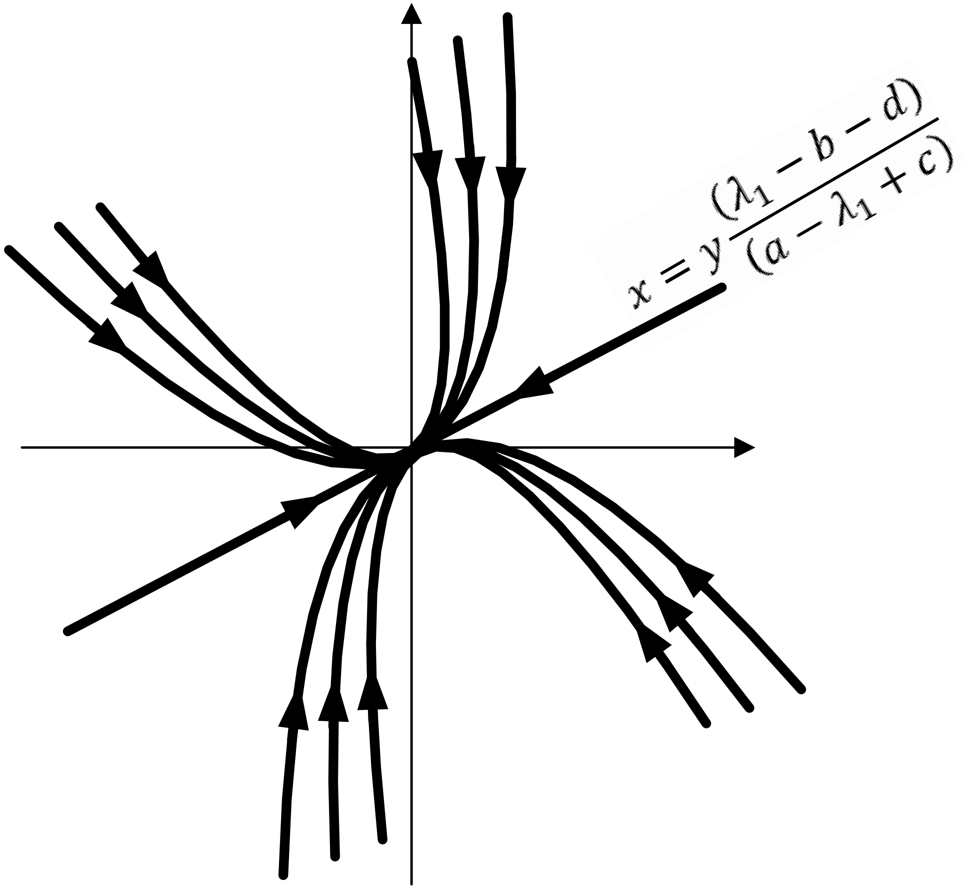
Далее на плоскости проводятся параболические фазовые траектории, причем построенная прямая является касательной к ним.

На полученном фазовом портрете необходимо отразить направление фазовых траекторий, в случае, если точка покоя является

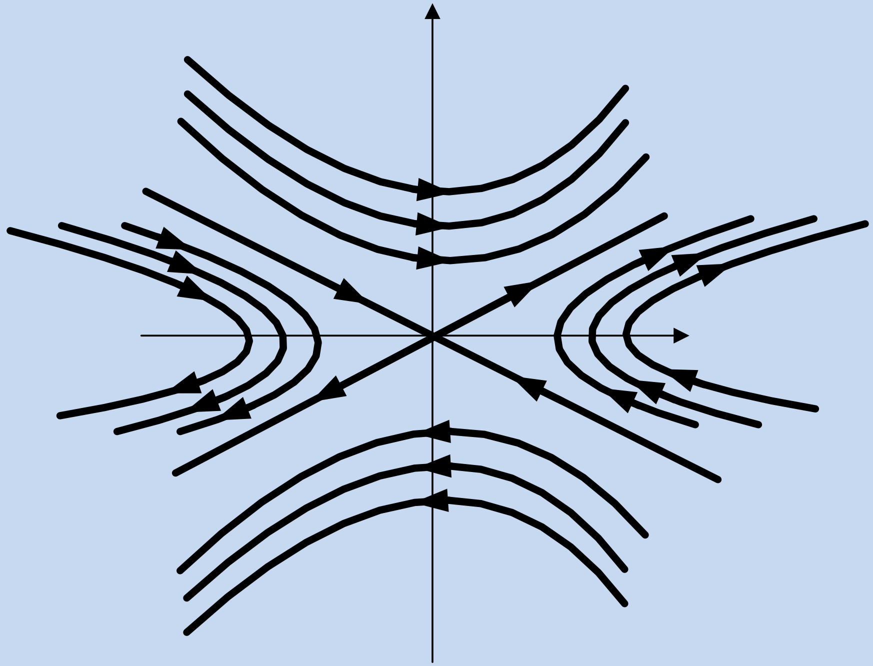
устойчивой, т.е. $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, траектории стремятся к ней, в противном случае, т.е. $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$, от нее.

Допустим, стационарная точка является устойчивой ($\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$), тогда направление фазовых траекторий будет отражено следующим образом.

3.2. Узел (4 из 4)



3.3. Седло (1 из 3)

Седло
при $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, т.е. ($\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$), представляет из себя фазовый портрет, например, вида 

3.3. Седло (2 из 3)

Способ построения фазового портрета

Для каждого значения λ_1 и λ_2 решается система уравнений (9).
В результате чего находятся уравнения прямых вида (10)

$$x = y\frac{(\lambda_1 - b - d)}{(a - \lambda_1 + c)}, x = y\frac{(\lambda_2 - b - d)}{(a - \lambda_2 + c)}. \quad (11)$$

На фазовой плоскости строим прямые, заданные уравнениями (11), проходящие через точку покоя.

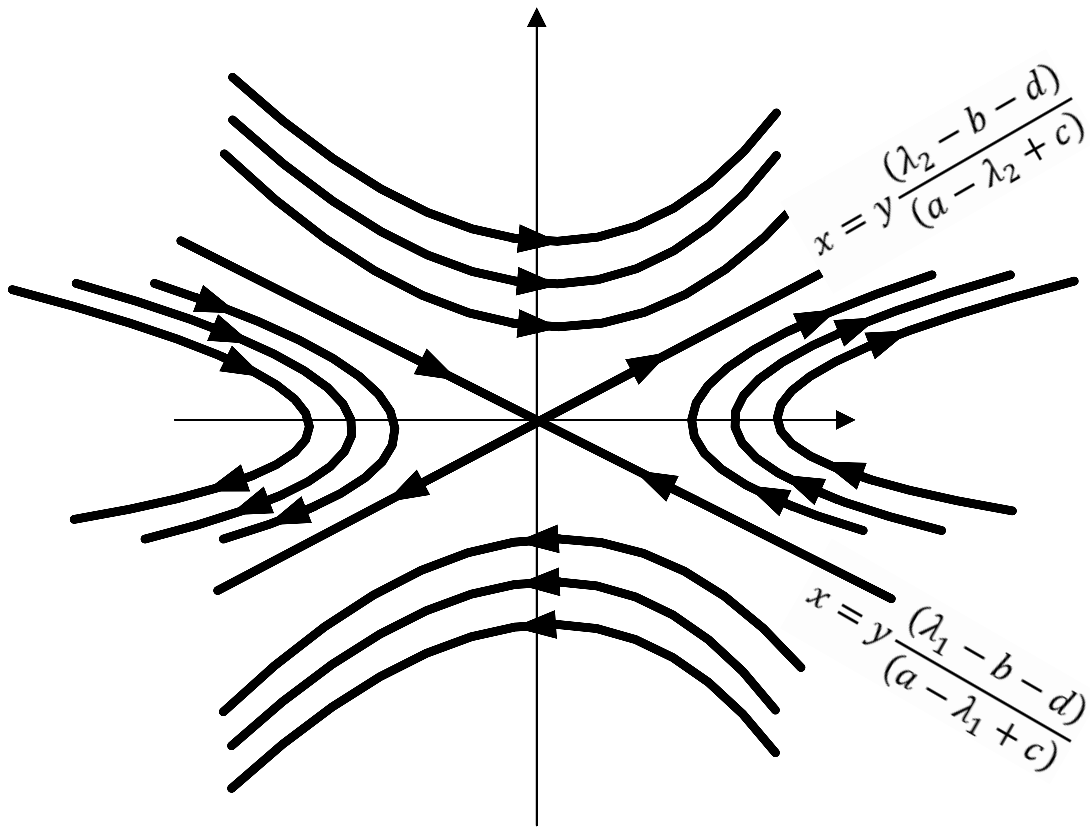
Далее на плоскости проводятся параболические фазовые траектории, не пересекающие ни точку покоя, ни графики построенных прямых (11).

На полученном фазовом портрете необходимо отразить направление фазовых траекторий, в случае, если корень характеристического уравнения

$\lambda_1 < 0$ или $\lambda_2 < 0$, траектории на прямой (11) стремятся к точке покоя, в противном случае, т.е. $\lambda_1 > 0$ или $\lambda_2 > 0$, направлены от нее.

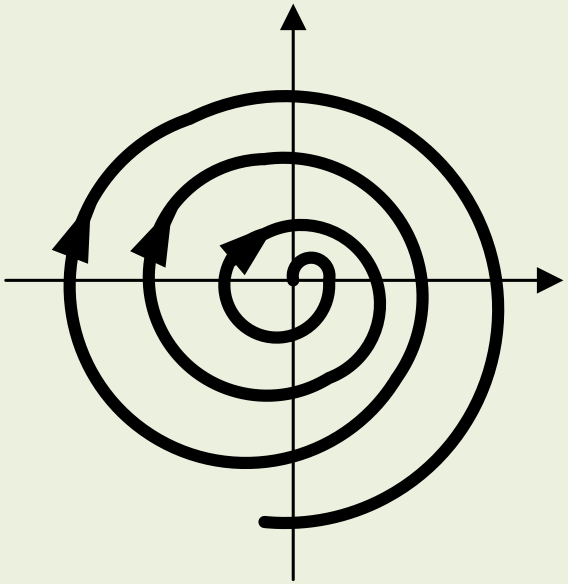
3.3. Седло (3 из 3)

Допустим, имеем корни уравнения (7) $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$, тогда направление фазовых траекторий будет отражено следующим образом.



3.4. Фокус (1 из 4)

Фокус
при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha \neq 0,$ представляет из себя фазовый портрет, например, вида



3.4. Фокус (2 из 4)

Способ построения фазового портрета

Построим вектор скорости для определения направления закручивания спирали. Зададим координаты произвольной точки *A(x,y)* и подставим в (6).

$$A(x, y) = A(-1{,}0), \text{ тогда}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a, \frac{dy}{dt} = -c.$$

Допустим, $a = -1$, $c = 0$, тогда

$$B\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = B(1{,}0),$$

Построим вектор по координатам *A* и *B*. Полученная прямая является касательной к спирали и определяет направление ее закручивания.

3.4. Фокус (3 из 4)

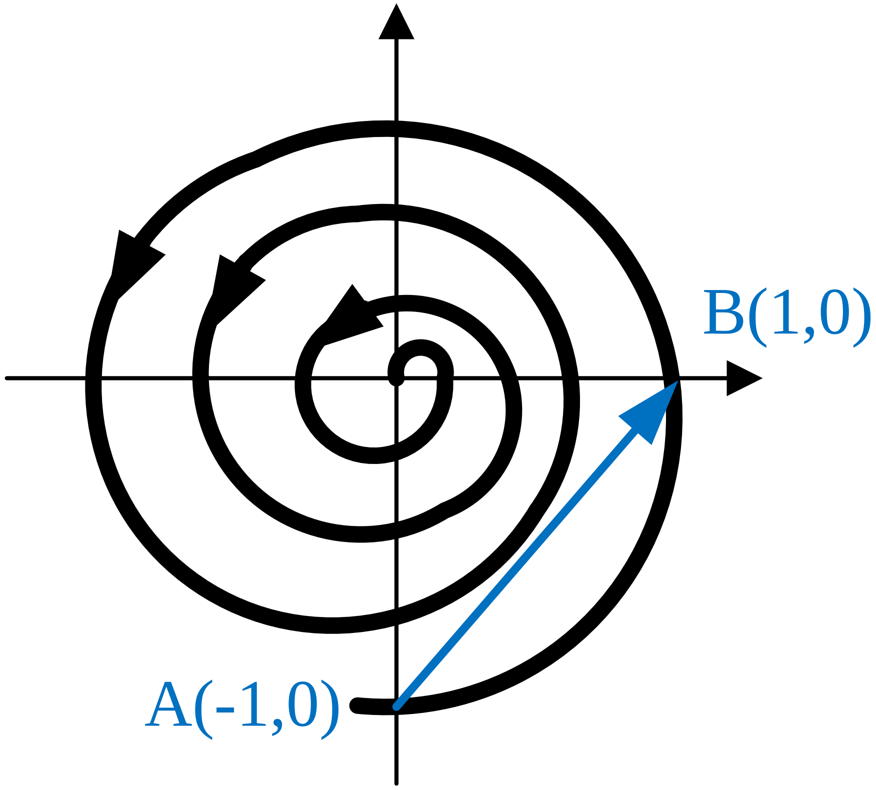
Допустим, полученный вектор скорости направлен слева направо, снизу вверх, тем самым задает движение против часовой стрелки.

На полученном фазовом портрете необходимо отразить направление стрелок для фазовых траекторий, в случае, если

$\alpha < 0$, траектории стремятся к точке покоя,
в противном случае, т.е. $\alpha > 0$, направлены от нее.

Допустим, $\alpha < 0$, тогда направление фазовых траекторий будет отражено следующим образом.

3.4. Фокус (4 из 4)



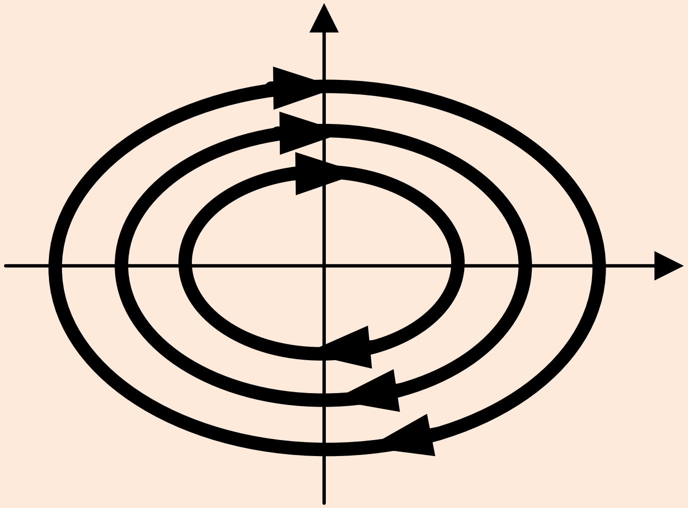
3.5. Центр (1 из 3)

Центр

при

$$\lambda_{1,2} = \pm\beta i,$$

представляет из себя фазовый портрет, например, вида



3.5. Центр (2 из 3)

Способ построения фазового портрета

Построим вектор скорости для определения направления.
Зададим координаты произвольной точки *A(x,y)* и подставим в (6).

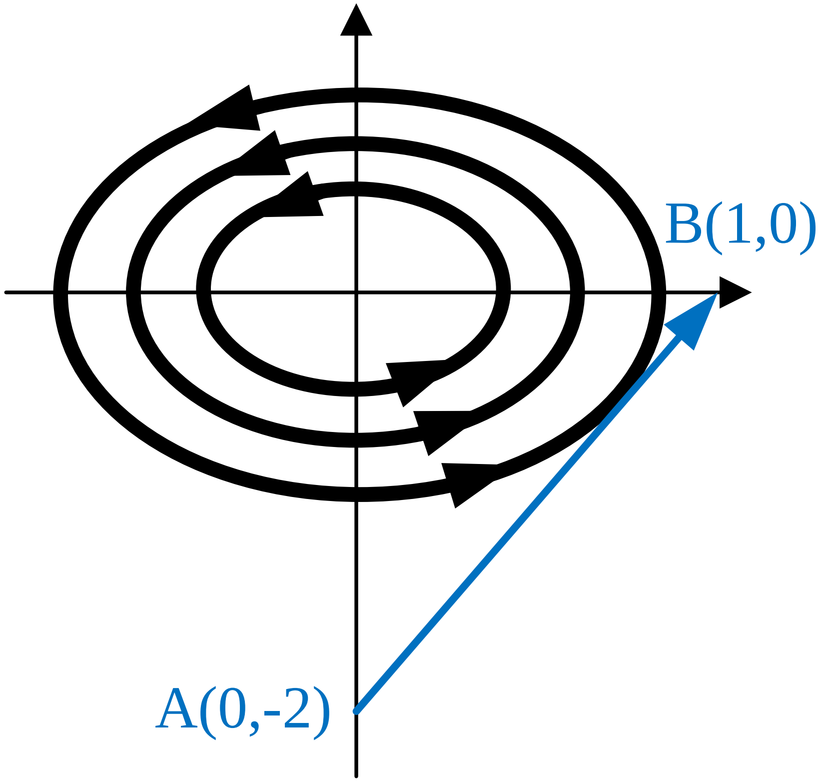
$$A(x,y) = A(0,-2), \text{ тогда}$$
$$\frac{dx}{dt} = -2b, \frac{dy}{dt} = -2d.$$

Допустим, $b = -\frac{1}{2}, d = 0$, тогда

$$B\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = B(1,0),$$

Построим вектор по координатам *A* и *B*. Полученная прямая является касательной к центру и определяет направление стрелок фазовых траекторий. В этом случае, фазовый портрет будет выглядеть следующим образом.

3.5. Центр (3 из 3)



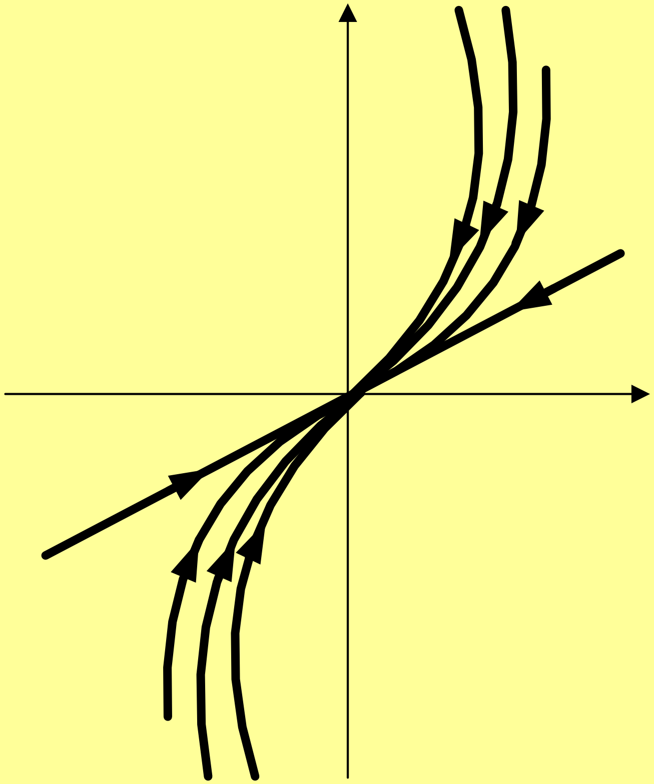
3.6. Выроженный узел (1 из 2)

Вырожденный узел

при

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

представляет из себя фазовый портрет, например, вида



3.6. Вырожденный узел (2 из 2)

На фазовой плоскости строим прямую, заданную уравнением (10), проходящую через точку покоя.

Далее на плоскости проводятся гиперболические фазовые траектории, причем построенная прямая пересекает их.

На полученном фазовом портрете необходимо отразить направление фазовых траекторий, в случае, если точка покоя является

устойчивой, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, траектории стремятся к ней, в противном случае, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, от нее.

3.7. Дикритический узел (1 из 2)

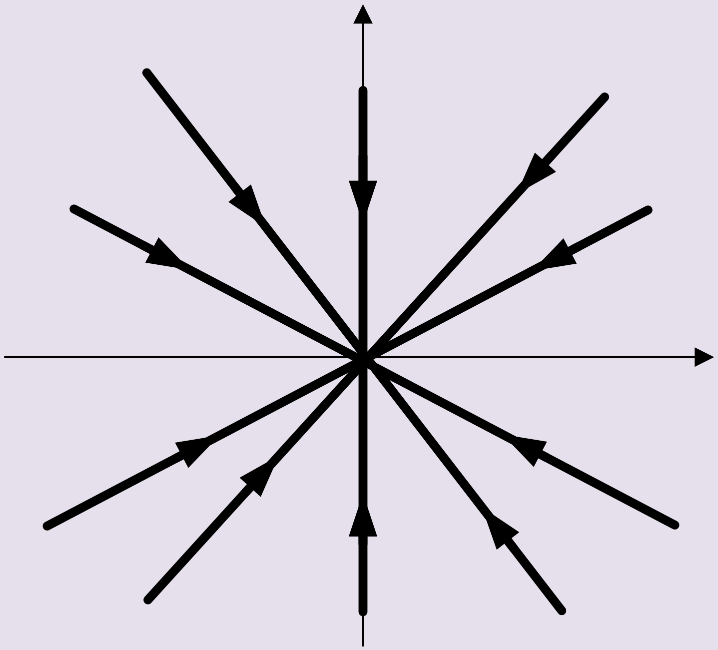
Дикритический узел

при

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = ax, \frac{dy}{dt} = ay$$

представляет из себя фазовый портрет, например, вида



3.7. Дикритический узел (2 из 2)

На фазовой плоскости строим семейство прямых, полученных из уравнения (10), проходящих через точку покоя.

На полученном фазовом портрете необходимо отразить направление фазовых траекторий, в случае, если точка покоя является

устойчивой, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, траектории стремятся к ней,
в противном случае, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, от нее.

4. Построение портрета в MathCad (1 из 3)

$ORIGIN := 1$

$x' = -3x$

$y' = -3y$

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$F1(X,Y) := -3X$

$F2(X,Y) := -3Y$

$i := 1..20$

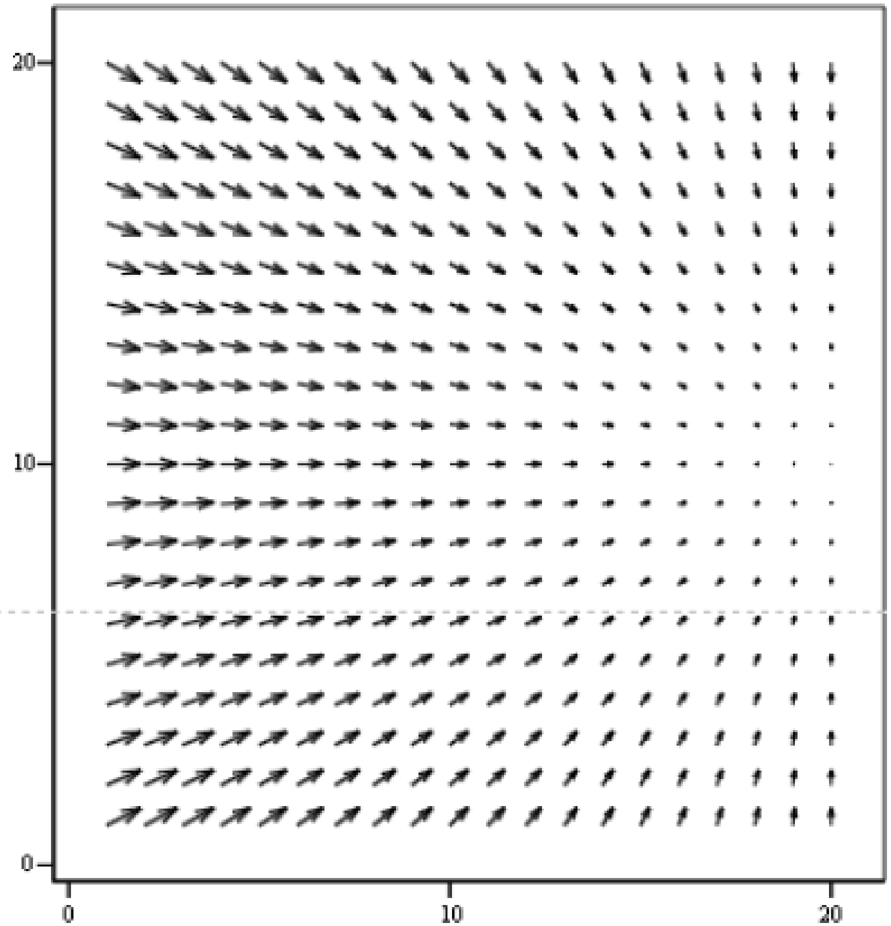
$j := 1..20$

$$U_i := -2 + i \cdot \frac{2}{20}$$

$$V_j := -1 + j \cdot \frac{2}{20}$$

$MF1_{i,j} := F1(U_i, V_j)$

$MF2_{i,j} := F2(U_i, V_j)$



(MF1, MF2)

4. Построение портрета в MathCad (2 из 3)

$$D(t,Y) := \begin{pmatrix} -3Y_1 \\ -3Y_2 \end{pmatrix}$$

$$Y1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y1 := \mathrm{rkfixed}(Y1,0,10,100,D)$

$$Y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y2 := \mathrm{rkfixed}(Y2,0,1,100,D)$

$$Y3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y3 := \mathrm{rkfixed}(Y3,0,1,100,D)$

$$Y4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Y4 := \mathrm{rkfixed}(Y4,0,1,100,D)$

$$Y5 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Y5 := \mathrm{rkfixed}(Y5,0,1,100,D)$

$$Y6 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Y6 := \mathrm{rkfixed}(Y6,0,1,100,D)$

$$Y7 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Y7 := \mathrm{rkfixed}(Y7,0,1,100,D)$

$$Y8 := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y8 := \mathrm{rkfixed}(Y8,0,1,100,D)$

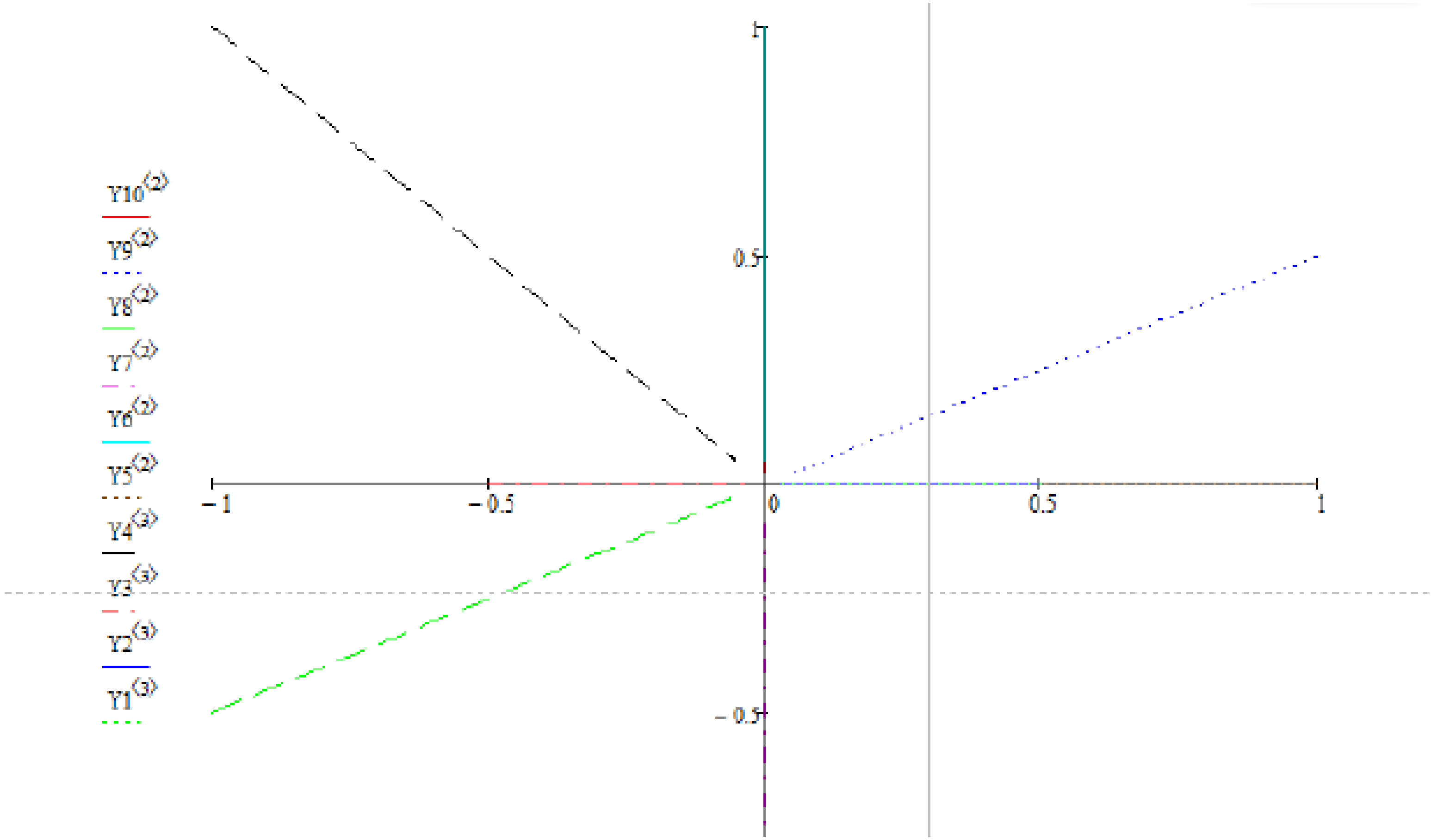
$$Y9 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Y9 := \mathrm{rkfixed}(Y9,0,1,100,D)$

$$Y10 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$Y10 := \mathrm{rkfixed}(Y10,0,1,100,D)$

4. Построение портрета в MathCad (3 из 3)



5. Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.