РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

1. Оглавление

- Локальная и глобальная теоремы существования
- Устойчивость по Ляпунову для уравнений и систем
- Устойчивость автономных систем
- Метод функций Ляпунова
- Устойчивость по первому приближению

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.1. Зависимость решения от начальных данных для уравнения и систем (1 из 2)

Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных

если правая часть $f(t,x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

непрерывна по совокупности переменных и имеет ограниченную частную производную $\frac{df}{dx}$ в некоторой области G изменения t, x, то решение

$$x(t) = x(t;\, t_0, x_0),$$

удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, где $(t_0, x_0) \in G$, непрерывно зависит от начальных данных.

Пусть через точку (t_0, x_0) проходит решение $x(t)$ уравнения (1), определенное на отрезке

$$\propto \le t \le \beta,\ \ t_0 \in (\propto, \beta).$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.1. Зависимость решения от начальных данных для уравнения и систем (2 из 2)

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при

$$|\widetilde{t_0} - t_0| < \delta, |\widetilde{x_0} - x_0| < \delta$$

решение $\tilde{x}$ уравнения (1), проходящее через точку $(\widetilde{t_0}, \widetilde{x_0})$, существует на отрезке $[\propto, \beta]$ и отличается там от $x(t)$ меньше чем на ε:

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon, \forall t \in [\propto, \beta].$$

Аналогичная теорема справедлива для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1,2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.2. Локальная теорема существования (1 из 2)

Пусть дана система дифференциальных уравнений (2), где t - независимая переменная (время); $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_n(t)$ - искомые функции; $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функции, определенные для $t \in (a, +\infty)$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ из некоторой области $D \subset R^n$. Если функции

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \; i = 1,2, \dots, n,$$

В некоторой области определения непрерывны по совокупности аргументов и имеют неограниченные частные производные по $x_1, x_2, \dots, x_n$, то для системы (2) справедлива локальная теорема существования.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.2. Локальная теорема существования (2 из 2)

Локальная теорема существования
для каждой системы значений $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $t_0 \in (a, +\infty)$, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, существует единственное решение $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ системы (2), определенное в некотором интервале $(t_0 - h_0, \ t_0 + h_0)$ изменения t и удовлетворяющее начальным условиям $x_i(t_0) = x_i^0, i = 1,2, \ldots, n.$ (3)

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.3. Продолжение решения

Пусть

$$x_1(t),\ x_2(t), \dots,\ x_n(t)$$

есть решение задачи Коши, определенное на интервале $I = (t_1, t_2)$.

Продолжение решения

решение

$$y_1(t),\ y_2(t), \dots,\ y_n(t)$$

называется продолжением решения $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$, если оно определено на большем интервале I_1, $I_1 \supset I$, и совпадает с $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ при t $\in I$.

Неограниченно продолжаемое решение

(неограниченно продолжаемое вправо или влево) решение, если его можно продолжить на всю ось $-\infty < t < +\infty$, $t_0 \in (\propto, \beta)$ (на полуось $t_0 \leq t < +\infty$ или $-\infty < t \leq t_0$ соответственно).

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

2.4. Глобальная теорема существования

Глобальная теорема существования

каждое решение $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t),\ i = 1,2,\dots,n,$$

где $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ – непрерывные функции на $[t_0, +\infty]$, существует на $[t_0, +\infty]$ (неограниченно продолжаемо вправо) и единственно.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

3.1. Устойчивость по Ляпунову для дифференциального уравнения (1 из 3)

Рассмотрим решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (1)$$

где функция $f(t, x)$ определена и непрерывна для $t \in (a, +\infty)$ и x из некоторой области D и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Пусть функция

$$x = \varphi(t)$$

есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x|_{t=t_0} = \varphi(t_0),\ t_0 > a.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

3.1. Устойчивость по Ляпунову для дифференциального уравнения (2 из 3)

Функция

$$x = x(t)$$

есть решение того же уравнения (1),
удовлетворяющее другому начальному условию

$$x|_{t=t_0} = x(t_0).$$

Предполагается, что решения $\varphi(t)$ и $x(t)$ определены для всех $t \geq t_0$, то есть неограниченно продолжаемы вправо. Тогда

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

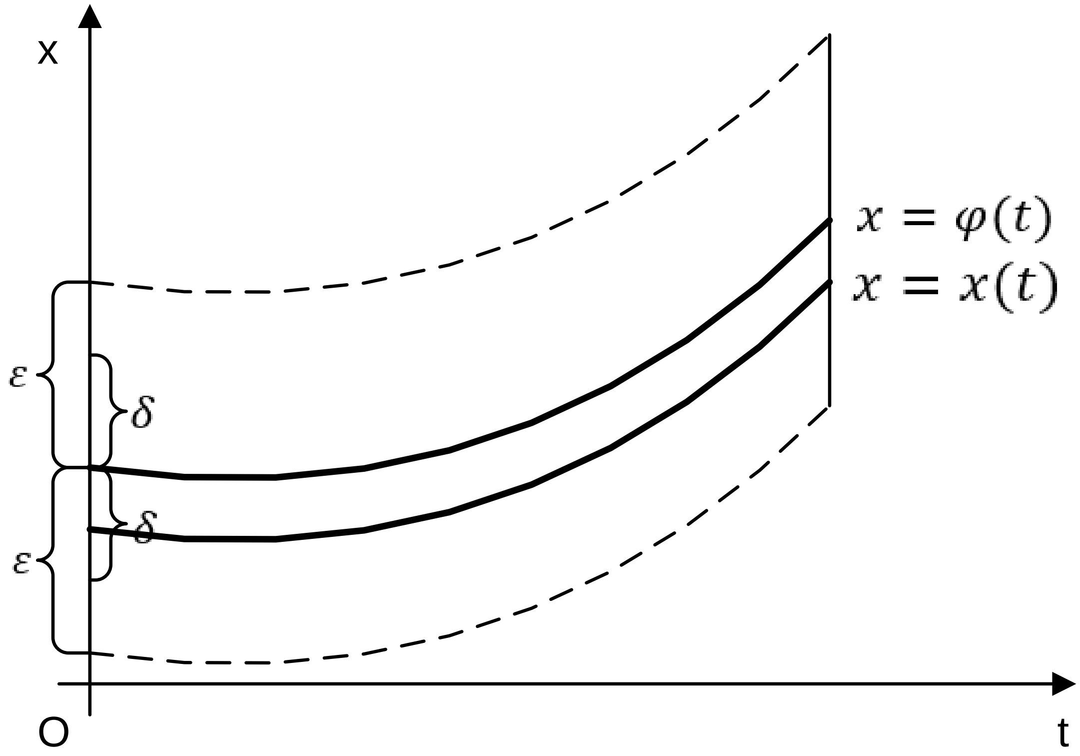
3.1. Устойчивость по Ляпунову для дифференциального уравнения (3 из 3)

Решение уравнения устойчиво по Ляпунову
решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $x = x(t)$ этого уравнения из неравенства $$\lvert x(t_0) - \varphi(t_0) \rvert < \delta \qquad (5)$$ следует неравенство $$\lvert x(t) - \varphi(t) \rvert < \varepsilon \qquad (6)$$ для всех $t \geq t_0$ (всегда можно считать, что $\delta \leq \varepsilon$).

Решение уравнения неустойчиво по Ляпунову
если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x = x(t)$ уравнения (1) неравенство (6) не выполняется, то решение $x = \varphi(t)$ неустойчиво.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

3.2. Геометрический смысл



Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

3.3. Асимптотически устойчивое решение дифференциального уравнения

Асимптотически устойчивое решение уравнения
$x = \varphi(t)$ уравнения (4), если 1. решение $x = \varphi(t)$ устойчиво; 2. существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t)$ уравнения (4), удовлетворяющего условию $\lvert x(t_0) - \varphi(t_0)\rvert < \delta_1$, имеем $$\lim_{t\to+\infty} \lvert x(t) - \varphi(t)\rvert = 0.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

4.1. Устойчивость по Ляпунову для системы дифференциальных уравнений (1 из 2)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2, \dots, n, \qquad (7)$$

где функции f_i определены для $t \in (a, +\infty)$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ из некоторой области D изменения $x_1, x_2, \dots, x_n$ и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности задачи Коши. Пусть все решения системы (7) неограниченно продолжаемы вправо при $t \geq t_0 > a$. Тогда

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

4.1. Устойчивость по Ляпунову для системы дифференциальных уравнений (2 из 2)

Решение системы уравнений устойчиво по Ляпунову

решение

$$\varphi_i(t),\ i = 1,2,\dots,n$$

системы (1) называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если для любого ε > 0 существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, той же системы, начальные значения которого удовлетворяют условию

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta,\ i = 1,2,\dots,n,$$

выполняются неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad (8)$$

для всех $t \geq t_0$.

Решение системы уравнения неустойчиво по Ляпунову

если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, не все неравенства (8) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ неустойчиво.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

4.2. Асимптотическая устойчивость решения системы дифференциальных уравнений

Асимптотически устойчивое решение системы уравнений
решение $\varphi_i(t),\ i = 1,2,\dots,n,$ системы (7), если 1. решение устойчиво по Ляпунову; 2. существует $\delta_1 > 0$ такое, что всякое решение решения $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$, для которого $\lvert x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)\rvert < \delta_1,\ i = 1,2,\dots,n,$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to+\infty} \lvert x_i(t) - \varphi_i(t)\rvert = 0,\ i = 1,2,\dots,n.$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.1. Устойчивость автономных систем

Автономная система уравнений

нормальная система дифференциальных уравнений,
если ее правые части f_i не зависят явно от t

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2,\dots,n, \qquad (9)$$

Пусть имеем автономную систему (9) и пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – такая совокупность чисел, что

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_n),\ i = 1,2,\dots,n.$$

Тогда система функций

$$x_i(t) \equiv a_i,\ i = 1,2,\dots,n,$$

будет решением системы (9).

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.2. Точка покоя

Точка покоя
точка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ фазового пространства $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы (9).

Рассмотрим автономную систему, для которой

$$f_i(0,0,\dots,0),\ i = 1,2,\dots,n,$$

так что точка

$$x_i(t) = 0,\ i = 1,2,\dots,n,$$

есть точка покоя системы. Обозначим *S(R)* шар и будем считать, что для рассматриваемой системы в шаре выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

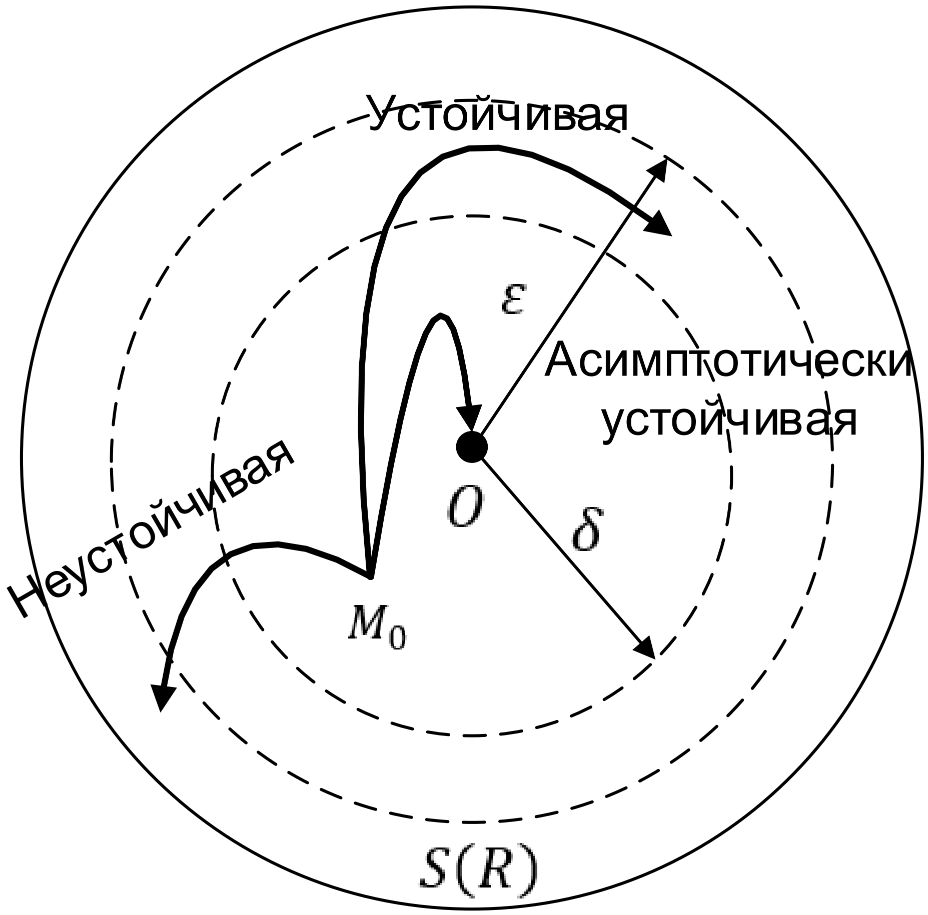
5.3. Устойчивость точек покоя

Точка покоя устойчива
$x_i = 0,\ i = 1,2,\dots,n,$ системы (9), если для любого $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < R)$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любая траектория системы, начинающаяся в начальный момент всех $t = t_0$ в точке $M_0 \in S(\delta)$, все время затем остается в шаре $S(\varepsilon)$.

Точка покоя асимптотически устойчива
если   1. она устойчива;   2. существует такое $\delta_1 > 0$ такое, что каждая траектория системы, начинающаяся в точке M_0 области $S(\delta_1)$, стремится к началу координат, когда время t неограниченно растет.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.4. Геометрический смысл



Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.5. Простейшие примеры точек покоя (1 из 2)

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0, y = 0$ системы из 2-х линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \tag{10}$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Будем искать решение в виде

$$x = \alpha e^{\lambda t}, y = \beta e^{\lambda t}.$$

Для определителя λ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

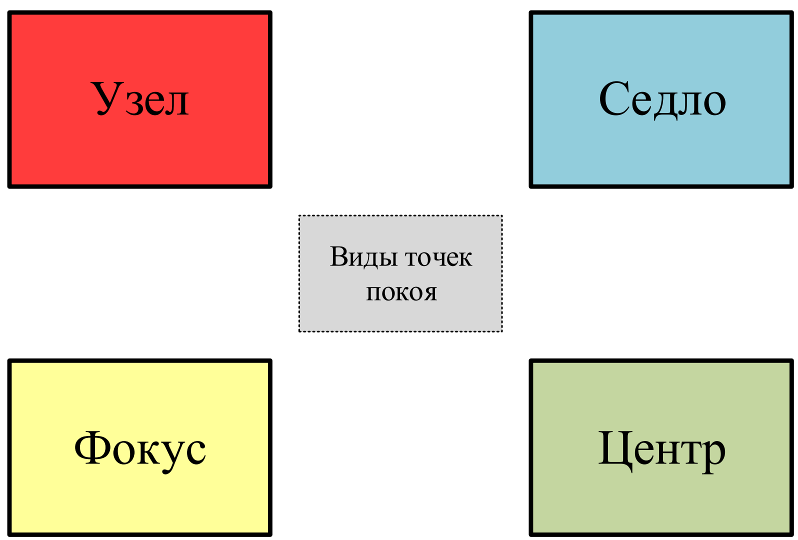
Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.5. Простейшие примеры точек покоя (2 из 2)

Величины α, β определяются из системы

$$
\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta &= 0,\\
a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta &= 0.
\end{aligned}
$$

В зависимости от значения корней характеристического уравнения (11) возможны следующие виды точек покоя



Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.6. Свойства характеристического уравнения (1 из 2)

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений
с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1,2,\dots,n,\ a_{ij} = const. \qquad (12)$$

Для системы (12) запишем характеристическое уравнение
и сформулируем его свойства

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}-\lambda & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

5.6. Свойства характеристического уравнения (1 из 2)

Свойства характеристического уравнения

1. если все корни уравнения имеют отрицательную действительную часть, то все решения системы (12) асимптотически устойчивы;
2. если хотя бы один корень уравнения имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы;
3. если уравнение имеет простые корни с нулевой действительной частью (т.е. чисто мнимые или равные нулю корни), а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то все решения устойчивы, но асимптотической устойчивости нет.

Теорема

решения системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t), \; i = 1,2, \dots, n, \qquad (13)$$

либо одновременно устойчивы, либо неустойчивы.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

6.1. Метод функций Ляпунова (1 из 2)

Метод функций Ляпунова

состоит в исследовании устойчивости точки покоя системы дифференциальных уравнений с помощью специальным образом выбранных функций $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ – так называемых функций Ляпунова. Причем делается это без предварительного решения системы.

Способ решения

Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; i = 1,2, \ldots, n, \tag{14}$$

для которой x_i, $i = 1,2, \ldots, n$, есть точки покоя. Если производная

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{15}$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

6.1. Метод функций Ляпунова (2 из 2)

$\frac{dv}{dt} \geq 0$, то точка покоя $x_i = 0,\ i = 1,2,\dots,n$, устойчива и наоборот.

Частный случай

В частном случае, если имеем автономную систему из 2-х уравнений

$$v = v(t, x, y)$$
$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y),$$

то анализу подлежит производная $\frac{dv}{dt}$, полученная из (15)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

6.2. Свойства функций Ляпунова (1 из 2)

Знакоопределенная функция
функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная в некоторой окрестности начала координат, называется знакоопределенной (знакоположительной или знакоотрицательной), если в области G $$\lvert x_i \rvert \le h\,, i = 1{,}2, \ldots, n,$$ где h – достаточно малое положительное число, она может принимать значения только одного определенного знака и обращается в нуль и лишь при условии $$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Знакопостоянная функция
функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области G может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в ноль и при $$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0.$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

6.2. Свойства функций Ляпунова (2 из 2)

Полная производная функции v по времени
величина $\frac{dv}{dt}$, определенная формулой (15), называется полной производной функции v по времени, составленной в силу системы уравнения (14).

Функция Ляпунова
функцию $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающую свойствами 1. функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в некоторой окрестности Ω начала координат; 2. функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ знакоположительна (знакоотрицательна) в Ω и $v(0,0, \ldots, 0) = 0$; 3. полная производная $\frac{dv}{dt}$ функции $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, составленная в силу системы (14), $\frac{dv}{dt} \leq 0$ ($\frac{dv}{dt} \geq 0$) всюду в Ω, называют функцией Ляпунова.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

6.3. Теорема Ляпунова об устойчивости точки покоя

Теорема Ляпунова об устойчивости

Если для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \; i = 1,2, \dots, n, \qquad (16)$$

существует дифференцируемая знакоопределенная функция $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, полная производная $\frac{dv}{dt}$ которой по времени, составленная в силу системы (16), есть знакопостоянная функция (знака, противоположного с v) или тождественно обращается в ноль, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1,2, \dots, n$, системы (16) устойчива.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

6.4. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости точки покоя

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости

Если для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2, \dots, n, \tag{17}$$

существует дифференцируемая знакоопределенная функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, полная производная $\frac{dv}{dt}$ которой по времени, составленная в силу системы (17), есть также знакоопределенная функция знака, противоположного с v, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1,2, \dots, n$, системы (17) асимптотически устойчива.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm

6.5. Теорема о неустойчивости

Теорема о неустойчивости

Пусть для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ f_i(0,0,\dots,0) = 0,\ i = 1,2,\dots,n, \qquad (18)$$

существует дифференцируемая в окрестности начала координат функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что $v(0,0,\dots,0) = 0$. Если ее полная производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы (18), есть также знакоположительная функция и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает положительные значения, то точка покоя $x_i = 0,\ i = 1,2,\dots,n$, системы (17) неустойчива.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

7.1. Устойчивость точек покоя по первому приближению

Метод первого приближения

состоит в рассмотрении и анализе устойчивости точек покоя однородной части в линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений.

Способ решения

Пусть дана линейная неоднородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1,2, \dots, n,\ a_{ij} = const, \quad (19)$$

Далее рассматривается линейная система, строго не связанная с (19).

Система уравнений первого линейного приближения

для системы (19) есть

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2, \dots, n, \quad (20)$$

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

7.2. Теорема устойчивости точек покоя по первому приближению

Теорема об асимптотической устойчивости точки покоя

если все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}-\lambda & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

имеют отрицательные действительные части, то точка покоя $x_i = 0$, $i = 1,2, \dots, n$, системы (19) и (20) асимптотически устойчива.

Теорема о неустойчивости точки покоя

если хотя бы один корень характеристического уравнения (21) имеет положительную действительную часть, то точка покоя $x_i = 0$ системы (19) и (20) неустойчива.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова

8. Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.

Все права защищены © 2018. Официальный сайт Дмитрия Степанова
http://stepanovd.com/training/27-dgvm