РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 3. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

1. Оглавление

- Общий вид системы уравнений, решение системы
- Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений
- Системы дифференциальных уравнений и их свойства
- Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами
- Пример реализации в MathCad

2.1. Общий вид системы дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений
Пример системы – задача динамики точки: даны силы, действующие на точку, необходимо найти закон движения, т.е. функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, выражающие зависимость координат точки от времени. Система, которая получается в этом случае, имеет вид $$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = h\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \end{cases} \quad (1)$$ где x, y, z – координаты движущейся точки, t – время, f, g, h – известные функции своих аргументов.

2.2. Каноническая и нормальный виды систем уравнений

Канонический вид системы уравнений
система вида (1) или в общем случае система m дифференциальных уравнений с m неизвестными функциями $x_1(t), x_2(t),\ldots, x_m(t)$ аргумента t вида $$x_i^{(k_i)} = f_i(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(k_i-1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{(k_m-1)}), \; i = 1,2,\ldots, m, \qquad (2)$$ разрешенную относительно старших производных.

Нормальная система 1-го порядка
система уравнений 1-го порядка, разрешенная относительно производных от искомой функции $$x_i' = f_i(t, x_1, x_2,\ldots, x_n), i = 1,2, \ldots, n. \qquad (3)$$

2.3. Решение нормальной системы

Решение нормальной системы
вида (3) на интервале *(a, b)* изменения аргумента *t* называется всякая система *n* функций $$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t), \ldots,\ x_n = x_n(t), \tag{4}$$ дифференцируемых на интервале $a < t < b$, обращающая уравнения системы (3) в тождества по *t* на интервале *(a, b)*.

2.4. Задача Коши

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

пусть имеем нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1,2, \dots, n, \qquad (5)$$

и пусть функции $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1,2, \dots, n$ определены на некоторой *(n+1)*-мерной области D изменения переменных $t, x_1, x_2, \dots, x_n$. Если существует окрестность Ω точки $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, в которой функции f_i непрерывны по совокупности аргументов и имеют ограниченные частные производные по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, то найдется интервал $t_0 - h_0 < t < t_0 + h_0$ изменения t, на котором существует единственное решение нормальной системы (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1|_{t=t_0} = x_1^0,\ x_2|_{t=t_0} = x_2^0,\ \dots,\ x_n|_{t=t_0} = x_n^0.$$

2.5. Общее и частное решение системы

Общее решение системы

Система n функций

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n), i = 1,2, \dots, n, \qquad (6)$$

зависящих от t и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется общим решением нормальной системы (3) в некоторой области Ω существования и единственности решения задачи Коши, если:

1) при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ система функций (6) обращает уравнение (3) в тождества;
2) в области Ω функций (6) решают задачу Коши.

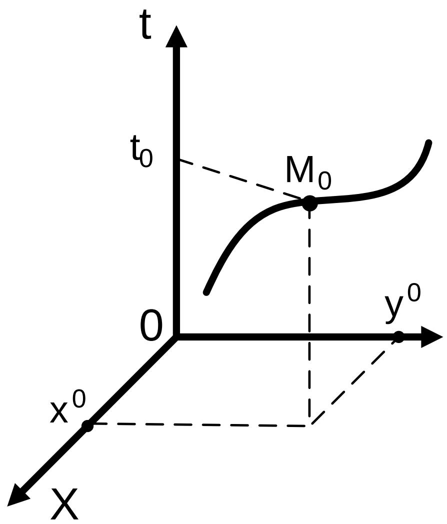
Частное решение системы

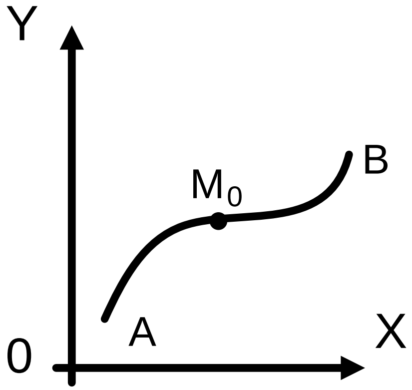
решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

2.6. Геометрический смысл

Пример системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y). \end{cases}$$





3-мерное пространство, интегральная кривая

Фазовая плоскость, фазовая траектория

3. Методы решения систем уравнений

3.1. Метод исключения (1 из 3)

Метод исключения

Пусть имеем нормальную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (7)$$

Продифференцировав первое уравнение из (7) по t имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \quad (8)$$

Заменяя в (8) $\frac{dx_i}{dt}$ их выражениями $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ из (7)
и сократив форму записи, получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9)$$

3.1. Метод исключения (2 из 3)

Уравнение (9) снова дифференцируем по t.
Принимая во внимание систему (7), получим

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{10}$$

Тогда, система, составленная из 1-го уравнения (7) и уравнений ниже будет разрешима относительно неизвестных $x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\dots$$
$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Внесем найденные выражения в уравнение

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3.1. Метод исключения (3 из 3)

Тем самым получим одно уравнение *n*-го порядка

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}\right). \qquad (11)$$

Если $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, есть решение системы (7),
то $x_1(t)$ - решение уравнения (11).

3.2. Метод интегрируемых комбинаций (1 из 2)

Метод интегрируемых комбинаций

Пусть имеем нормальную систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \; i = 1,2, \dots, n. \qquad (12)$$

Интегрируемая комбинация

дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнения (12), но уже легко интернирующееся.

Одна интегрируемая комбинация дает возможность получить одно уравнение

$$\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1,$$

Связывающее независимую переменную t и неизвестные функции $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3.2. Метод интегрируемых комбинаций (2 из 2)

Первый интеграл системы уравнений (12)
дифференцируемая функция $\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая постоянное значение на любой интегральной кривой этой системы.

Если найдено n первых интегралов системы (12) и все они независимы, т.е. якобиан системы функций Φ_1, Φ_2, …, Φ_n отличен от нуля, то задача интегрирования системы (12) решена, так как из системы ниже определены все неизвестные функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\
\Phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\
\dots \\
\Phi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_n.
\end{gathered}
$$

3.3. Пример метода комбинаций (1 из 2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \qquad (13)$$

Складывая почленно уравнения, находим 1-ю интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y,$$
$$\frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$
$$\ln|x+y| = t + \ln|C_1|,$$
$$x + y = C_1 e^t.$$

Почленно вычитая из 1-го уравнения системы 2-е,
получаем 2-ю интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y),$$
$$\frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

3.3. Пример метода комбинаций (2 из 2)

$$\ln|x - y| = -t + \ln|C_2|,$$
$$x - y = C_2 e^{-t}.$$

Сложив найденные комбинации, находим

$$x = \frac{1}{2}(C_1 e^t + C_2 e^{-t}),$$
$$y = \frac{1}{2}(C_1 e^t - C_2 e^{-t}),$$

4.1. Системы линейных уравнений

Линейная система дифференциальных уравнений

если она линейна относительно неизвестной функции и их производных, входящих в уравнение. Система n линейных уравнений 1-го порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t),\ i = 1,2,\dots,n. \quad (14)$$

Линейная однородная система уравнений

если $f_i(t) \equiv 0,\ i = 1,2,\dots,n,$ на интервале (a,b).

Линейная неоднородная система уравнений

если $f_i(t) \neq 0,\ i = 1,2,\dots,n,$ на интервале (a,b).

4.2. Свойства линейных уравнений (1 из 7)

Теорема 1

если все функции a_{ij} и $f_i(t)$, $i = 1,2, \ldots, n$, непрерывны на отрезке $a \leq t \leq b$, то в достаточно малой окрестности каждой точки $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, где $t_0 \in (a, b)$, выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши и, следовательно, через каждую такую точку проходит единственная интегральная кривая системы (14).

Теорема 2

если $X(t)$ является решением линейной однородной системы, то $cX(t)$, где c – произвольная постоянная, является решением той же системы.

Теорема 3

сумма

$$X_1(t) + X_2(t)$$

двух решений $X_1(t)$, $X_2(t)$ линейной однородной системы уравнений является решением той же системы.

4.2. Свойства линейных уравнений (2 из 7)

Следствие

линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{m} c_i X_i(t)$$

С произвольными постоянными коэффициентами c_i решений $X_1(t), \ldots, X_m(t)$ линейной однородной системы уравнений является решением той же системы.

Теорема 4

если $\tilde{X}(t)$ есть решение неоднородной системы, а $X_0(t)$ - решение соответствующей однородной системы, то сумма

$$\tilde{X}(t) + X_0(t)$$

будет решением неоднородной системы.

4.2. Свойства линейных уравнений (3 из 7)

Линейная зависимые векторы

$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$, где

$$X_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \ldots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}$$

на интервале а $< t < b$, если существуют постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) + \ldots + \alpha_n X_n(t) \equiv 0 \qquad (15)$$

при $t \in (a, b)$, причем по крайней мере одно из чисел α_i не равно нулю.

Линейная независимые векторы

$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ на (a, b),

если тождество (15) справедливо только для $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

4.2. Свойства линейных уравнений (4 из 7)

Фундаментальная система решений

пусть имеем линейную однородную систему

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad (16)$$

где $A(t)$ - $n \times n$-матрица с элементами $a_{ij}(t)$. Система n решений

$$X_1(t),\ X_2(t), \ldots,\ X_n(t)$$

линейной однородной системы (16), линейно независимых на интервале а $< t < b$, называется фундаментальной.

Теорема 5

определитель Вронского $W(t)$ фундаментальной на интервале а $< t < b$ системы решений линейной однородной системы (16) с непрерывными на отрезке а $\leq t \leq b$ коэффициентами $a_{ij}(t)$ отличен от нуля во всех точках интервала (a, b).

4.2. Свойства линейных уравнений (5 из 7)

Теорема о структуре общего решения линейной однородной системы

общим решением в области a $< t < b$, $|x_k| < +\infty$, $k = 1,2,\dots,n$,
линейной однородной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

с непрерывными на отрезке a $\le t \le b$ коэффициентами $a_{ij}(t)$ является линейная комбинация n независимых на интервале a $< t < b$ решений $X_1(t)$, $X_2(t)$,…, $X_n(t)$ системы (16)

$$X_{\text{о.о.}} = \sum_{j=1}^{n} c_i\,X_i(t),$$

где c_1, c_2, …, c_n - произвольные постоянные числа.

4.2. Свойства линейных уравнений (6 из 7)

Фундаментальная матрица системы

есть квадратная матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots\, x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots\, x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots\, x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются линейно независимые решения $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ системы (16).

4.2. Свойства линейных уравнений (7 из 7)

Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы

общее решение в области а $< t < b$, $|x_k| < +\infty$, $k = 1,2, \dots, n$,
линейной неоднородной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \qquad (17)$$

с непрерывными на отрезке а $\le t \le b$ коэффициентами $a_{ij}(t)$ и правыми частями $f_i(t)$ равно сумме общего решения

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t),$$

соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения $\tilde{X}(t)$ неоднородной системы (17):

$$X_{\text{о.н.}} = X_{\text{о.о.}} + X_{\text{ч.н.}}$$

4.3. Метод вариации постоянных (1 из 3)

Метод вариации постоянной
позволяет найти частное решение неоднородной системы, если известно общее решение линейной однородной системы.

Способ решения

Пусть общее решение однородной системы есть

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(t).$$

Тогда

$$\frac{dX_k}{dt} = A(t)X_k(t),\ t \in (a,b),\ k = 1,2,\dots,n,$$

где $X_k(t)$ линейно независимы.

4.3. Метод вариации постоянных (2 из 3)

Будем искать решение неоднородной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \qquad (18)$$

в виде

$$\tilde{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, X_k(t), \qquad (19)$$

где $c_k(t)$, $k = 1,2,\ldots,n$ – неизвестные функции от t.

Дифференцируя (19) по t имеем

$$\frac{\tilde{X}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, \frac{dX_k(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\, X_k(t). \qquad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в (18) вместо X и $\frac{dX}{dt}$, и с учетом того, что $\frac{dX_k(t)}{dt} - A(t)X_k(t) \equiv 0$ имеем

4.3. Метод вариации постоянных (3 из 3)

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(t)\, X_k(t) = F(t). \qquad (21)$$

Определителем системы (21) является определитель Вронского фундаментальной системы решений $X_1(t)$, $X_2(t)$,…, $X_n(t)$. Определитель отличен от нуля всюду на интервале $t \in (a, b)$, поэтому система (21) имеет единственное решение

$$c'_k(t) = \varphi_k(t),\ k = 1,2, \dots, n,$$

где $\varphi_k(t)$ - известные непрерывные функции.

Проинтегрируем последнюю

$$c'_k(t) = \int \varphi_k(t)\, dt,\ k = 1,2, \dots, n. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (19), находим частное решение системы (18)

$$\tilde{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k\,(t) \int \varphi_k(t)\, dt.$$

5.1. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Линейная система уравнений с постоянными коэффициентами

записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t), \ i = 1,2, \dots, n, \qquad (23)$$

в которой все коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ – постоянные.

Методы интегрирования линейных систем уравнений

с постоянными коэффициентами включают в себя преобразования Лапласа, метод Эйлера и матричный метод.

5.2. Метод Эйлера (1 из 3)

Метод Эйлера

используется для решения системы
линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \quad\quad\quad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (24)$$

Способ решения

Решение системы (24) ищется в виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = \alpha_n e^{\lambda t}, \quad (25)$$

где $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – постоянные

Поставляя x_k из (25) в систему (24), сокращая переменные, получаем систему

5.2. Метод Эйлера (2 из 3)

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{12}-\lambda)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Для того, чтобы система (26) имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы определитель был равен нулю

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{12}-\lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Если все корни $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$, уравнения (27) различны, то можно найти решение исходной системы (24) в виде

$$x_{1i} = \alpha_{1i}e^{\lambda_i t}, x_{2i} = \alpha_{2i}e^{\lambda_i t}, \ldots, x_{ni} = \alpha_{ni}e^{\lambda_i t}, i = 1,2,\ldots,n,$$

5.2. Метод Эйлера (3 из 3)

где второй индекс указывает номер решения, первый – неизвестной функции.

Построенные таким образом n частных решений системы (24) образуют фундаментальную систему решений этой системы

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Следовательно общее решение однородной линейной дифференциальной систему уравнений (24) имеет вид

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) +, \dots, + C_nX_n(t).$$

5.3. Матричный метод (1 из 2)

Матричный метод

Запишем систему (24) в виде

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad (29)$$

где $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ - $n \times n$- матрица с постоянными действительными элементами a_{ij}.

Собственный вектор g

матрицы А, если $Ag = \lambda g$.

Собственное значение числа λ

матрицы А, отвечающее собственному вектору g, если является корнем характеристического уравнения

$\det(A - \lambda I) = 0$, где I – единичная матрица.

5.3. Матричный метод (2 из 2)

Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны, то собственные векторы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно независимы и приводят матрицы А к диагональному виду.

Найдя собственные значения и вектора системы (24), рассчитывается общее решение согласно теореме.

Теорема

если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ собственные значения матрицы A различны, то общее решение системы (21) имеет вид

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} g_2 + , \ldots , + C_n e^{\lambda_n t} g_n. \qquad (30)$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_n$ - собственные векторы-столбцы матрицы A, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные числа.

6. Пример реализации в MathCad (1 из 2)

$x0 := 0 \qquad x1 := 10$

Given

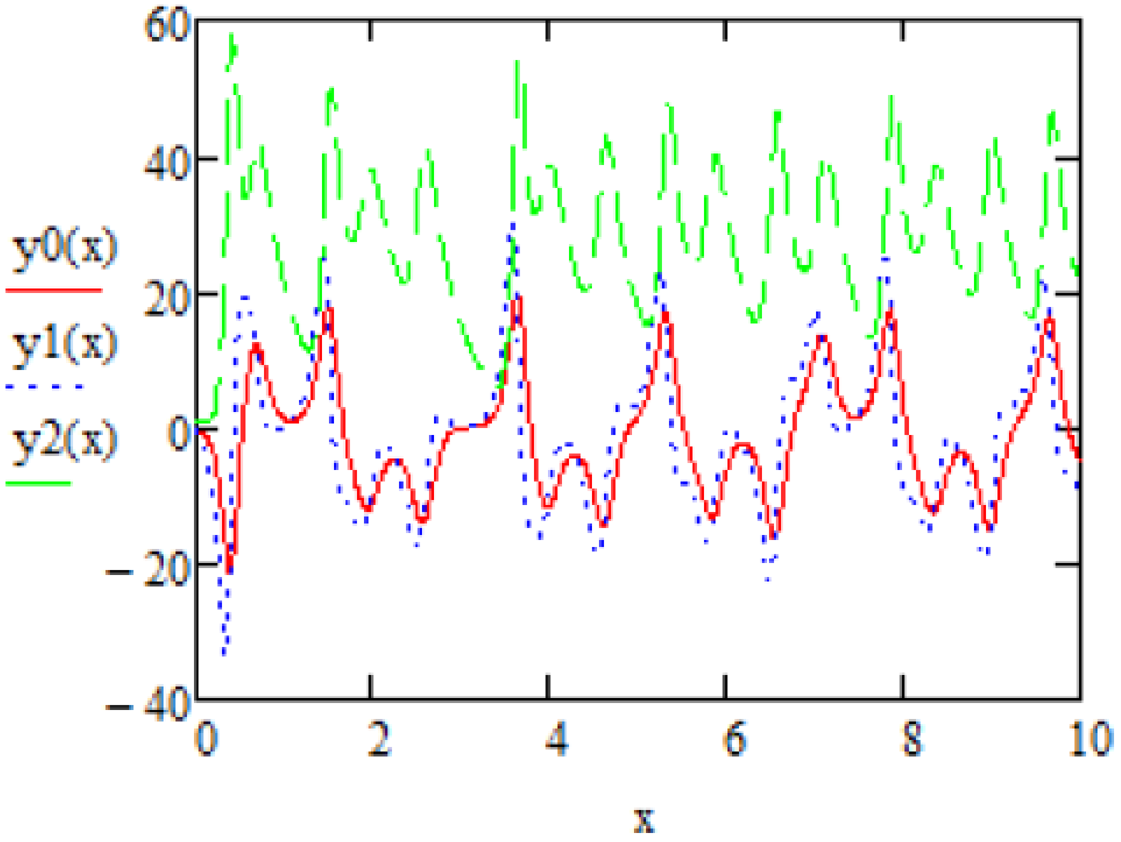
$$\frac{d}{dx}y0(x) = -8\,y0(x) + 8\,y1(x) \qquad y0(x0) = -1$$

$$\frac{d}{dx}y1(x) = 30\,y0(x) + y1(x) - y0(x)\,y2(x) \qquad y1(x0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}y2(x) = y0(x)\,y1(x) - \frac{8\,y2(x)}{3} \qquad y2(x0) = 1$$

$$\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \end{pmatrix}, x, x1\right]$$

6. Пример реализации в MathCad (2 из 2)



7. Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.