РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Работа посвящена моделированию динамических систем
с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. МИРЭА

Москва – 2018

1. Оглавление

2. Общий вид уравнения n-го порядка

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

где F – некоторая функция от n+2 переменных, $n \geq 1$,
x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция,
$y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ – ее производные.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка

уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно.

3. Методы понижения порядка дифференциального уравнения

3.1. Метод понижения порядка (1 из 3)

Метод понижения порядка
состоит в том, чтобы с помощью замены переменной (подстановки) исходное дифференциальное уравнение свести к уравнению порядкам ниже.

1-й тип уравнений, допускающий понижение порядка
$y' = f(x).$ (1)

Введем функцию *p(x)*

$$y' = p(x),$$
$$y'' = p'(x).$$

Так как *p'(x)* есть уравнение 1-го порядка, найдя *p(x)*, решим уравнение (1), т.е. $y' = p(x)$.

3.1. Метод понижения порядка (2 из 3)

Метод понижения порядка
на практике порядок понижается путем последовательного интегрирования уравнения.

Способ решения

Пусть дано

$$y'' = f(x). \tag{2}$$

Делаем подстановку

$$y'' = (y')' = \frac{dy\prime}{dx},$$

где из (2) следует $dy' = f(x)dx,$ т.е.

$$(y')' = f(x)dx. \tag{3}$$

3.1. Метод понижения порядка (3 из 3)

Интегрируем (3)

$$y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1. \quad (4)$$

Интегрируем (4)

$$y = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2.$$

Общий случай
$y^{(n)} = f(x).$ (5)

Решение для (5) представимо в виде

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

3.2. Метод без явной функции y (1 из 2)

2-й тип уравнений, допускающий понижение порядка, не содержащий явно функцию *y*
$y'' = f(x, y').$ (6)

Введем функцию *p(x)*

$$y' = p(x),$$
$$y'' = p'(x).$$

Таким образом $p' = f(x, p)$ есть уравнение 1-го порядка с общим решением $p = \varphi(x, C_1)$. Заменяя $p = y'$ имеем

$$y' = \varphi(x, C_1),$$
$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3.2. Метод без явной функции y (2 из 2)

Общий случай
$y^{(n)} = F\left(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$ (7)

Порядок уравнения (3) можно понизить на k единиц, заменив

$$y^{(k)} = p(x).$$

Тогда

$$y^{(k+1)} = p'(x), \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}.$$

Уравнение (7) примет вид

$$F\left(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}\right) = 0.$$

3.3. Метод без переменной *x* (1 из 2)

3-й тип уравнений, допускающий понижение порядка, не содержащий явно переменную *x*

$$y'' = f(y, y'). \tag{8}$$

Введем функцию *p(y)*

$$y' = p(y) = p(y(x)),$$
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot y' = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p.$$

Таким образом $\frac{dp(y)}{dy} \cdot p = f(y, p)$ есть уравнение 1-го порядка с общим решением $p = \varphi(y, C_1)$. Заменяя $p = y'$ имеем

$$y' = \varphi(y, C_1),$$
$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$
$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Интегрируем последнее уравнение

3.3. Метод без переменной *x* (2 из 2)

$$\int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = x + C_2.$$

Общий случай
$y^{(n)} = F\left(y, y', y'', y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$ (9)

Порядок уравнения (9) можно понизить на 1 единицу, заменив

$$y' = p(y) = p.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p\left((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy}\right) \text{ и т.д.}$$

4. Линейные уравнения *n*-го порядка

Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка

если его можно записать в виде

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \qquad (10)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$,…, $a_n(x)$ - непрерывные функции.

Теорема о существовании и единственности решения

пусть функции $a_1(x)$, $a_2(x)$,…, $a_n(x)$ непрерывны на отрезке [*a*,*b*], тогда существует единственное решение *y(x)* уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_0^1,$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \text{ при } x_0 \in \text{x}[a, b].$$

4.1. Однородные и неоднородные уравнения

Линейное однородное уравнение *n*-го порядка
уравнение вида $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \qquad (11)$$ соответствующее уравнению (10).

Линейное неоднородное уравнение *n*-го порядка
уравнение вида (10) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x).$$

4.2. Линейные зависимые и независимые функции на отрезке

Линейно зависимые функции
вида $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ на отрезке $[a,b]$, если существуют такие числа $c_i \neq 0,\, i = 1, \ldots, n$: $\sum_{i=1}^{n} c_i > 0$, что выполняется тожество $c_1 y_1(x), +c_2 y_2(x) + \ldots c_n\, y_n(x) \equiv 0,\, \forall x \in [a, b].$ (12)

Линейно независимые функции
вида $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, если тождество (12) выполняется в случае, когда все c_1, c_2,.., c_n равны нулю.

4.3. Определитель Вронского

Определитель Вронского, построенный для системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$
$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots\ y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots\ y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots\ y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

5.1. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения

Фундаментальная система решений (ФСР)
система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, состоящая из n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (11).

Теорема о структуре общего решений линейного однородного уравнения
пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ есть ФСР линейного однородного дифференциального уравнения (11). Тогда общее решение этого уравнения задается формулой $$y_{\text{оо}}(x) = c_1 y_1(x), + c_2 y_2(x) + \ldots c_n\, y_n(x). \qquad (13)$$

5.2. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с коэффициентами (1 из 2)

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами
$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (14)$$

Общее решение для (14) записывается в виде

$$y_{oo}(x) = c_1 y_1(x), + c_2 y_2(x), \qquad (15)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ - ФСР, а c_1,c_2 - произвольные числа.

Решение уравнения (14) методом Эйлера будет в виде

$\mathrm{y}(x) = e^{\lambda x}$, где λ – неизвестное число.

Найдем производные

$$\mathrm{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x},$$
$$\mathrm{y}''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

5.2. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с коэффициентами (2 из 2)

Подставим найденные значения в (14)

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + \mathrm{q} e^{\lambda x} = 0.$$

Найденное уравнение запишем в виде характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda^2 + \mathrm{q} = 0. \tag{15}$$

Найдем дискриминант уравнения (15)

$$D = p^2 - 4q.$$

В зависимости от значения дискриминанта общее решение уравнения (14) $y_{\text{оо}}(x)$ будет принимать различные значения.

5.3. Два различных действительных решения характеристического уравнения

1-й случай решения характеристического уравнения
$D = p^2 - 4q > 0,$ λ_1, λ_2 - два различных действительных решения уравнения (15).

Тогда решения уравнения (14) запишутся в виде

$$y_1\,(x) = e^{\lambda_1 x},$$
$$y_2\,(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

А общее решение уравнения (14) будет

$$y_{оо}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

5.4. Два одинаковых действительных решения характеристического уравнения

2-й случай решения характеристического уравнения
$D = p^2 - 4q = 0,$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ - решения уравнения (15).

Тогда решения уравнения (14) запишутся в виде

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x},$$
$$y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

А общее решение уравнения (14) будет

$$y_{oo}(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} + c_2 e^{-\frac{p}{2}x}.$$

5.5. Два комплексных решения характеристического уравнения

3-й случай решения характеристического уравнения
$D = p^2 - 4q < 0,$ $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-\frac{D}{4}}$ - два различных комплексных решения уравнения (15).

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{-\frac{D}{4}}.$$

Тогда решения уравнения (14) запишутся в виде

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta\mathrm{x},$$
$$y_2(x) = e^{\beta x}\cos\beta\mathrm{x}.$$

А общее решение уравнения (14) будет

$$y_{oo}(x) = c_1 e^{\alpha x}\sin\beta\mathrm{x} + c_2 e^{\beta x}\cos\beta\mathrm{x}.$$

6.1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (10)
есть сумма частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ этого уравнения и общего решения $y_{\text{оо}}(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения (11) $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x).$ (16)

6.2. Линейные неоднородные уравнения 2-го порядка (1 из 2)

Линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами
$y'' + py' + qy = f(x).$ (17)

Общее решение для (17) записывается в виде (16)

$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{чн}}(x) + y_{\text{оо}}(x),$
где $y_{\text{чн}}(x)$ - частное решение уравнения (17),
$y_{\text{оо}}(x)$ - общее решение уравнения

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (18)$$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – ФСР уравнения (18)

$$y_{\text{чн}}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \quad (20)$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$ – неизвестные функции.

Тогда запишем систему

6.2. Линейные неоднородные уравнения 2-го порядка (2 из 2)

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases} \tag{21}$$

Решением системы (21) является

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} dx\,, \tag{22а}$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} dx. \tag{22б}$$

Тогда частное решение (20) с учетом (22) будет

$$y_{чн}(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx \cdot y_1(x) - \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx \cdot y_2\,(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ оперделены в $y_{оо}(x)$.

Однородное общее решение (18) ищется согласно п.5.2-5.5.

6.3. Пример решения линейного неоднородного уравнения (1 из 3)

$$y'' - y = 6e^{2x}. \qquad (23)$$

Будем искать решение уравнения (23) согласно (16). Найдем $y_{оо}(x)$

$$y'' - y = 0,$$
$$\lambda^2 - 1 = 0,$$
$$\lambda = \pm 1,$$
$$\{e^x, e^{-x}\} \text{ – ФСР},$$
$$y_{оо}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x. \qquad (24)$$

Будем искать $y_{чн}(x)$ по формуле

$$y_{чн}(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^x.$$

Для этого запишем систему

6.3. Пример решения линейного неоднородного уравнения (2 из 3)

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} + c_2' e^x = 0, \\ -c_1' e^{-x} + c_2' e^x = 6e^{2x}. \end{cases}$$

Зададим определить Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 2.$$

Найдем c_1 и c_2 согласно (22)

$$c_1(x) = -\int \frac{e^x \cdot 6e^{2x}}{2} dx = -\frac{3}{3} e^{3x} = -e^{3x},$$

$$c_1(x) = \int \frac{e^{-x} \cdot 6e^{2x}}{2} dx = 3e^x = 3e^x.$$

6.3. Пример решения линейного неоднородного уравнения (3 из 3)

Тогда $y_{\text{чн}}(x)$ запишется

$$y_{\text{чн}}(x) = -e^{3x}e^{-x} + 3e^{x}e^{x} = -e^{2x} + 3e^{2x} = 2e^{2x}. \qquad (25)$$

Общее решение $y_{\text{он}}(x)$ рассчитаем в виде суммы (24) и (25)

$$y_{\text{он}}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + 2e^{2x}.$$

7. Пример реализации в MathCad (1 из 2)

$\omega := 2$

Given

$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$

$x(0) = 1$

$x'(0) = 0$

$x1 := \mathrm{Odesolve}(t, 2\pi)$

Given

$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$

$x(0) = 2$

$x'(0) = 0$

$x2 := \mathrm{Odesolve}(t, 2\pi)$

Given

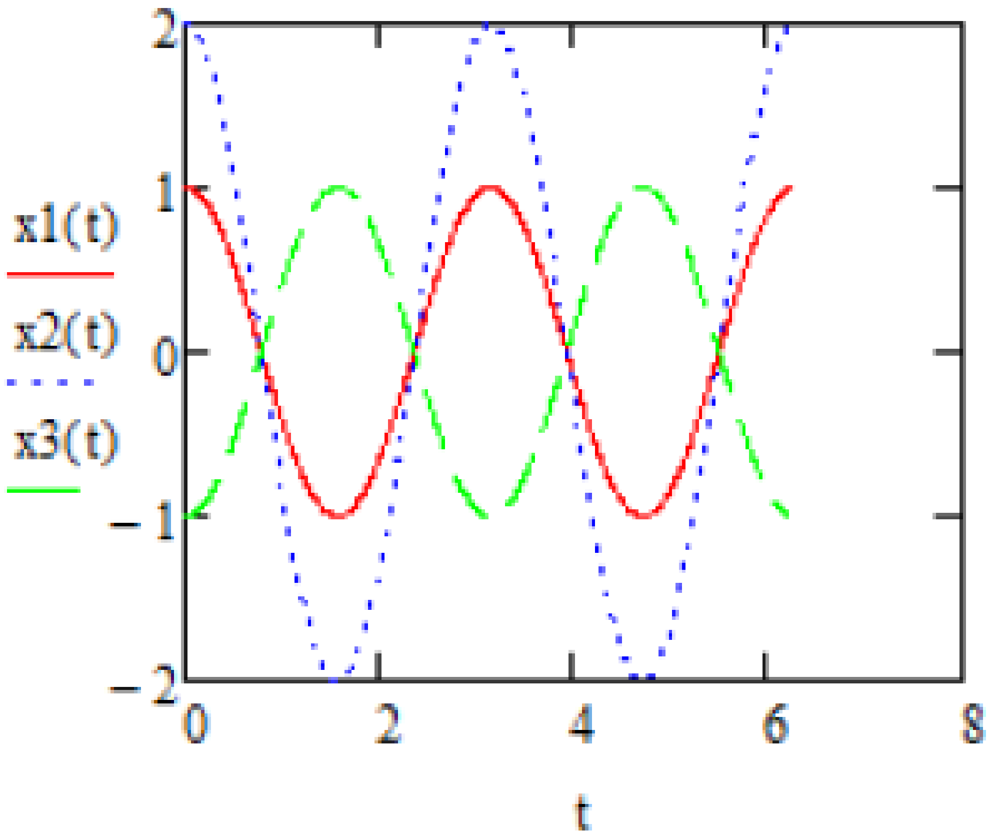
$x''(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$

$x(0) = -1$

$x'(0) = 0$

$x3 := \mathrm{Odesolve}(t, 2\pi)$

7. Пример реализации в MathCad (2 из 2)



8. Список литературы

- Вся высшая математика. Т 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.