РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МИРЭА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена моделированию динамических систем с использованием элементов высшей математики

Контакты:
http://stepanovd.com/training/27-dgvm
mail@stepanovd.com

Автор:
Степанов Дмитрий Юрьевич
к.т.н., доц. РТУ МИРЭА

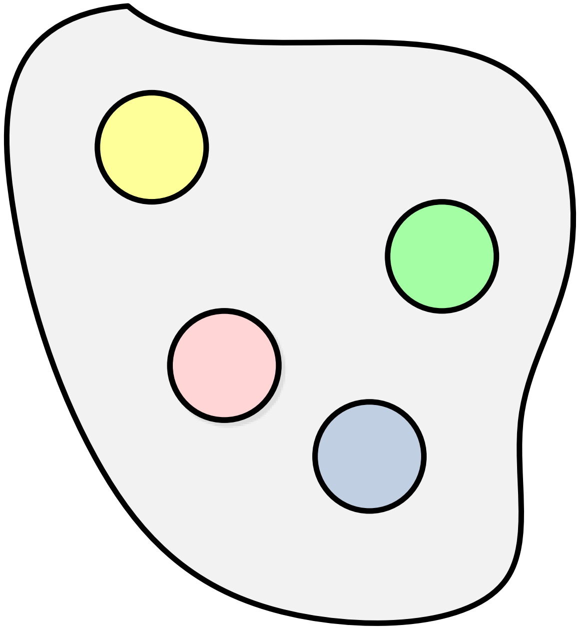
Москва – 2018

1. Оглавление

- Определение системы, виды и классы систем
- Моделирование и кинематическая интерпретация систем
- Фазовые точки, пространство, портрет в среде MathCad
- Моделирование на основе дифференциальных уравнений
- Особые точки и бифуркация системы
- Устойчивость и хаос системы
- Примеры моделирования динамических систем
- Пример реализации генератора Ван-дер-Поля на языке C++

2. Система

Система
совокупность элементов и отношений, связанных друг с другом в единое целое, которое обладает свойствами, отсутствующими у элементов или отношений их образующих.



3. Системы от вида данных (1 из 2)

Биотехническая система

система, представляющая собой совокупность биологических и технических элементов, связанных между собой в едином контуре управления.

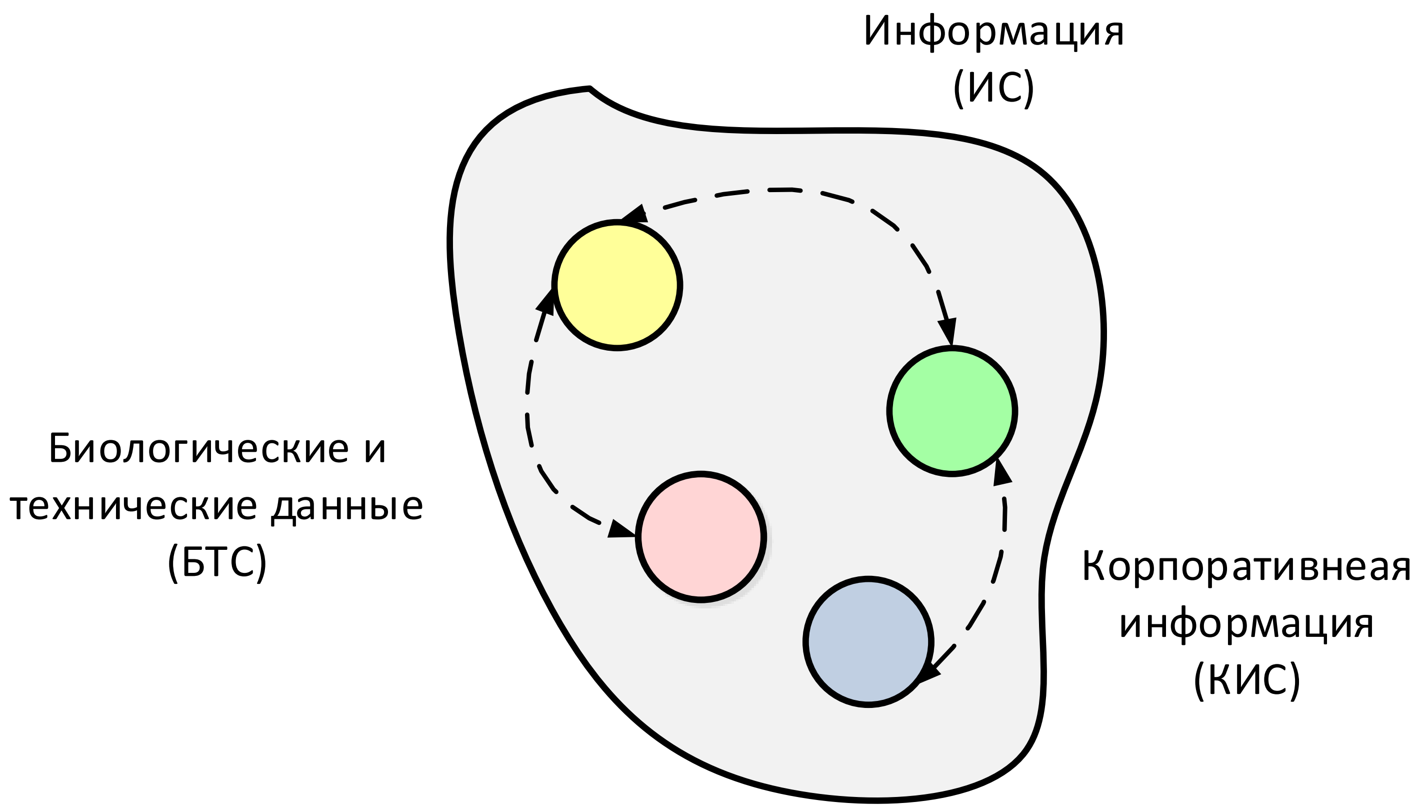
Информационная система

система, предназначенная для хранения, поиска и обработки информации, и соответствующие человеческие, технические, финансовые и другие организационные ресурсы, которые обеспечивают и распространяют информацию.

Корпоративные информационные системы

масштабируемая система, предназначенная для комплексной автоматизации всех видов хозяйственной деятельности компаний, а также корпораций, требующих единого управления.

3. Системы от вида данных (2 из 2)



4. Системы от изменения

Статическая система
система, состояние которой практически не изменяется в течение определенного периода ее существования.

Динамическая система
объект или процесс, для которого определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон эволюции, описывающий изменение начального состояния с течением времени.

5. Моделирование систем

Закон эволюции

здание математической модели эволюции системы* может вестись в виде дифференциальных уравнений, дискретных отображений, с помощью теории графов, теории марковских цепей и др.

Математическая модель

считается заданной, если введены координаты системы, определяющие ее состояние, а также задан закон эволюции состояния во времени.

* – здесь и далее под системой подразумевается динамическая система (ДС)

6. Моделирование систем на основе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, .., x_N), n = 1, .., \mathrm{N},$$

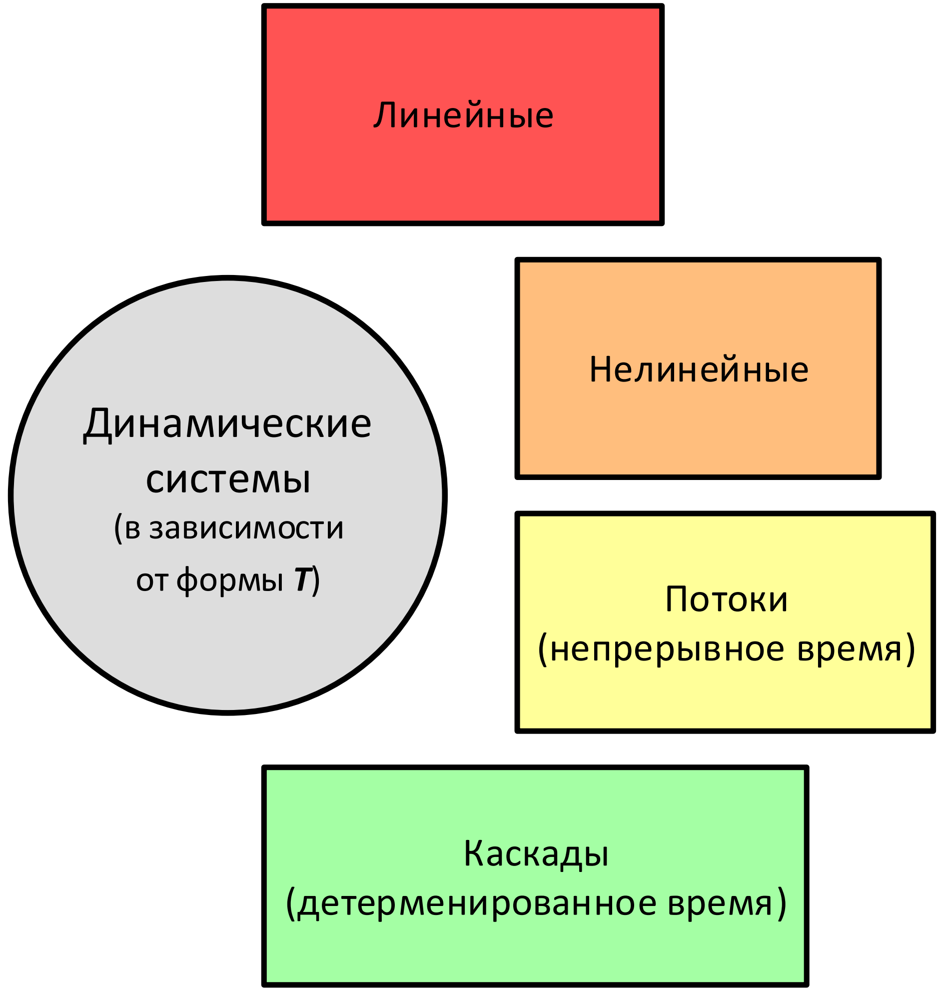
$$\dot{x} = F(x),$$ векторная форма записи

где $x_1, .., x_N$ задают координаты точки x в N мерном пространстве и определяют состояние x_i объекта, f_i – закон эволюции, а $F(x)$ – вектор-функция размерности N.

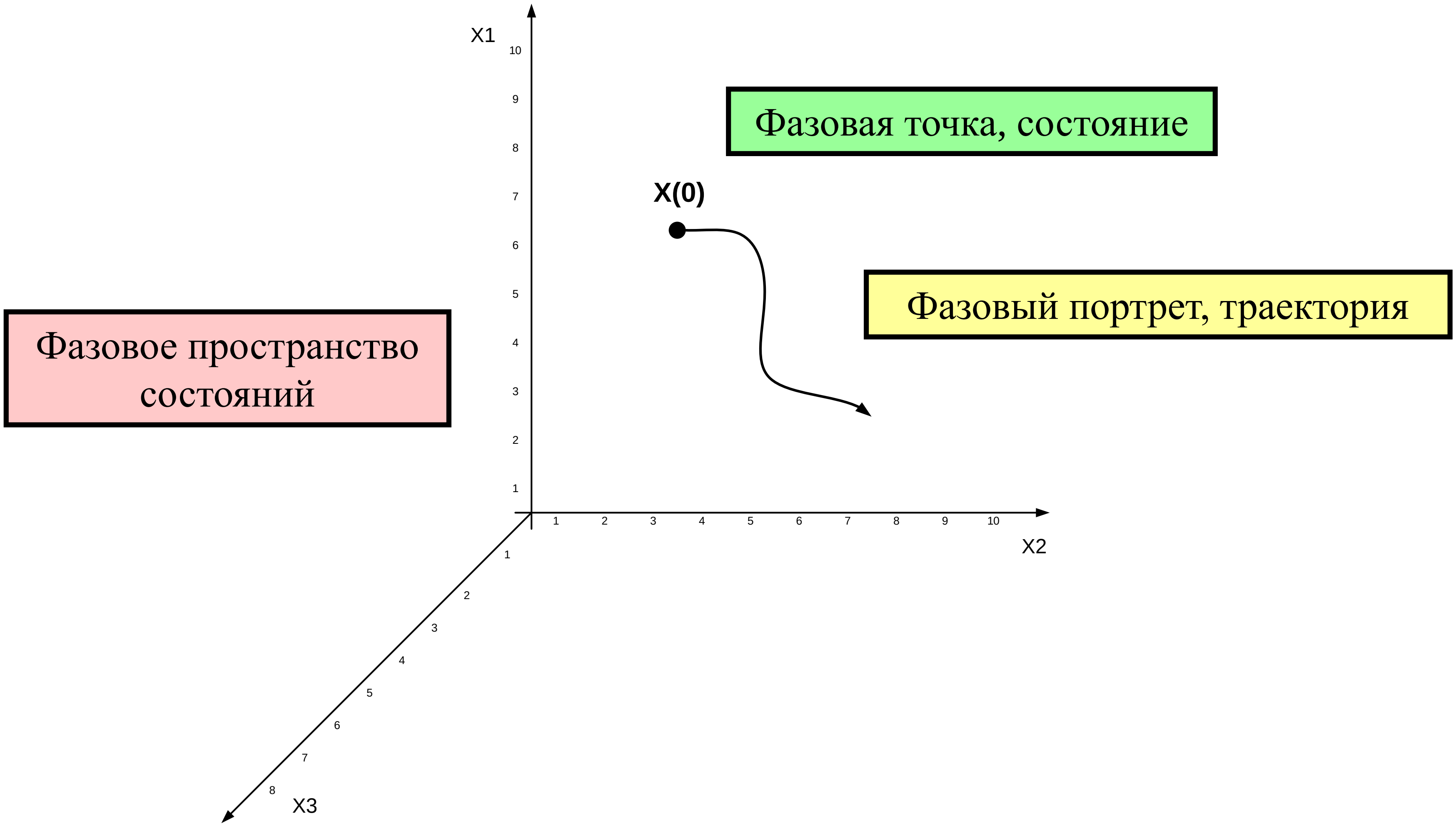
$\mathbf{x}(t) = T_i x(t_0)$, операторная форма записи

где $x(t_0)$ – начальное состояние в момент времени t_0, а $x(t)$ определяет текущее состояние объекта или процесса, полученное с использованием оператора эволюции T_i.

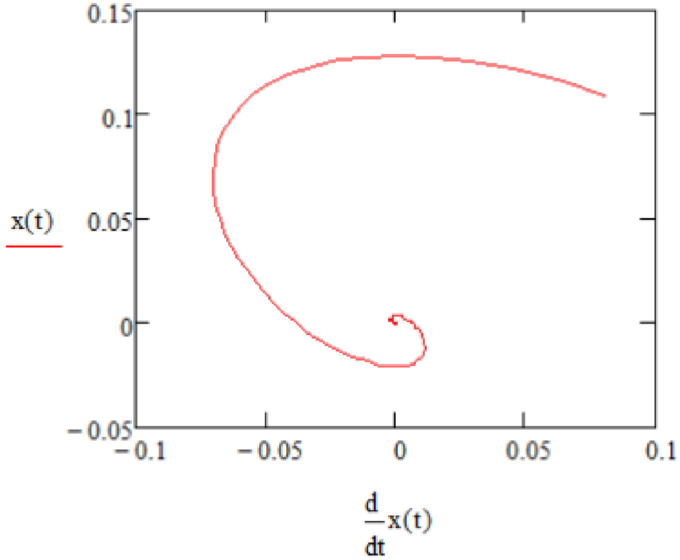
7. Классификация динамических систем

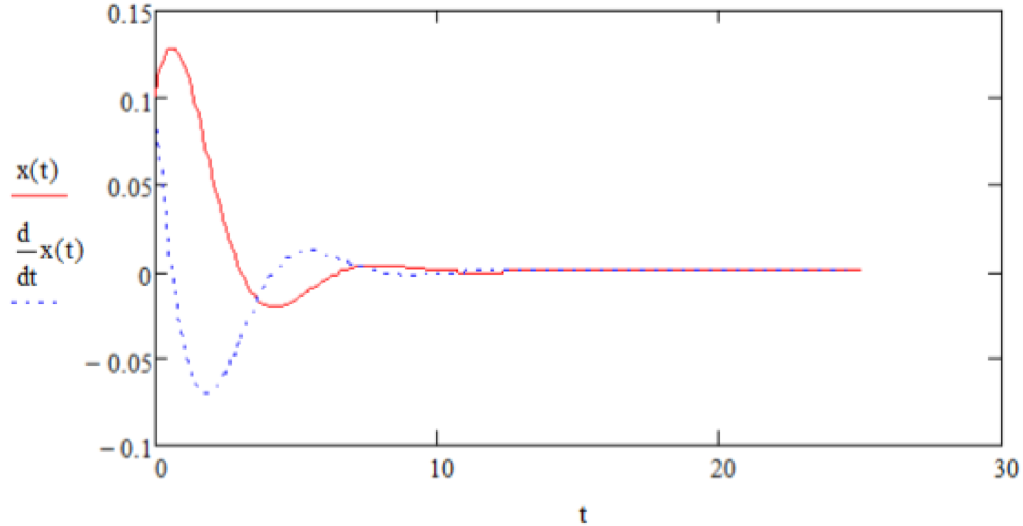


8. Фазовые точка, пространство, портрет



9. Фазовый портрет и решение в MathCad

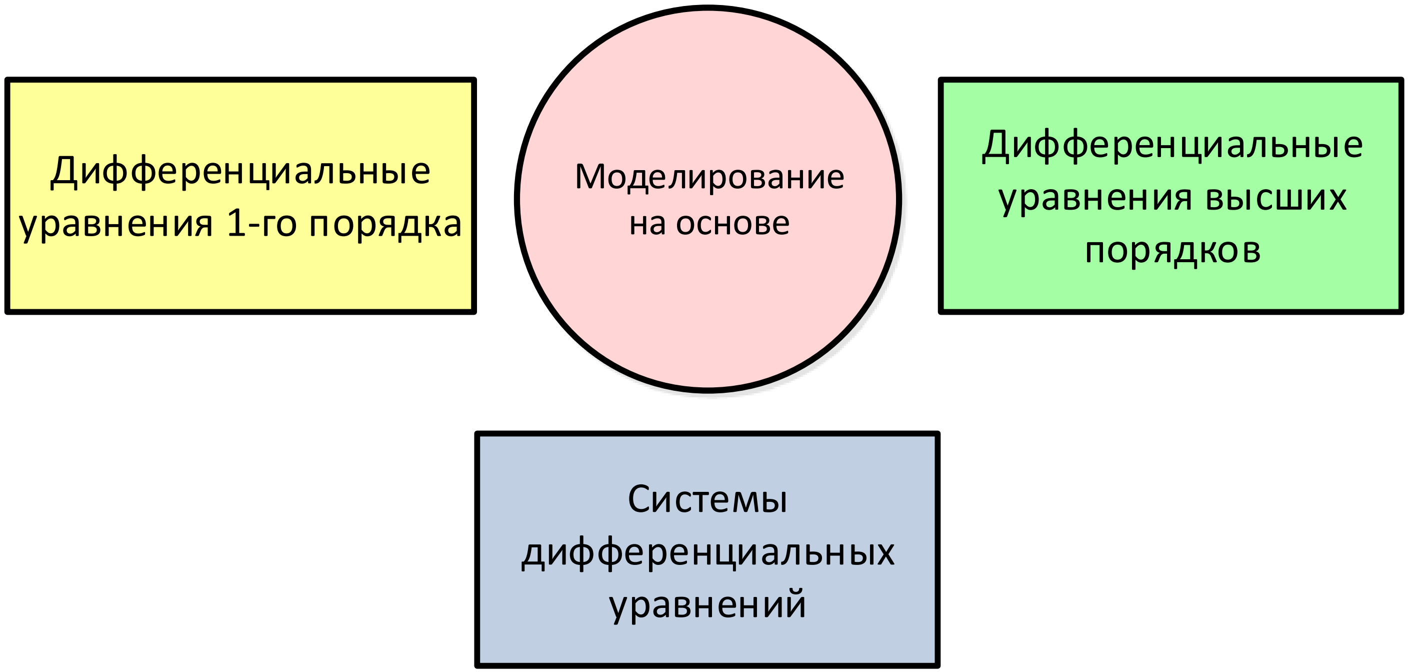




Фазовый портрет

График решения от *t*

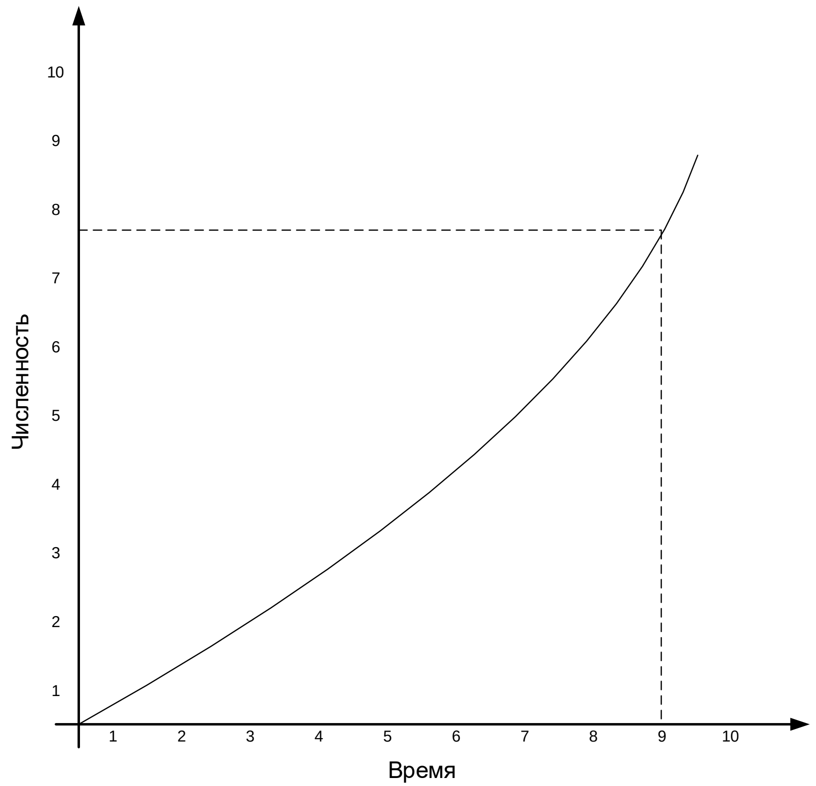
10. Виды ДУ для моделирования систем



* – здесь и далее дифференциальные уравнения (ДУ)

10.1. Задания на основе ДУ 1-го порядка

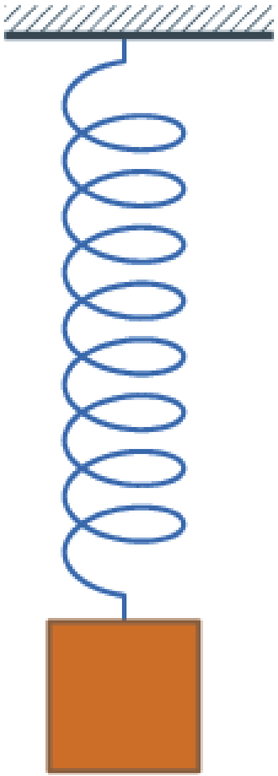
$\dot{x} = \propto x,$
простейший случай, где x соответствует, например, числу особей в динамике популяции.



10.2. Задание ДУ высших порядков

$$\boldsymbol{F = -kx,}$$
$$\boldsymbol{F = ma, \omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}, a = \ddot{x},}$$
$$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 \mathrm{x} = 0,}$$

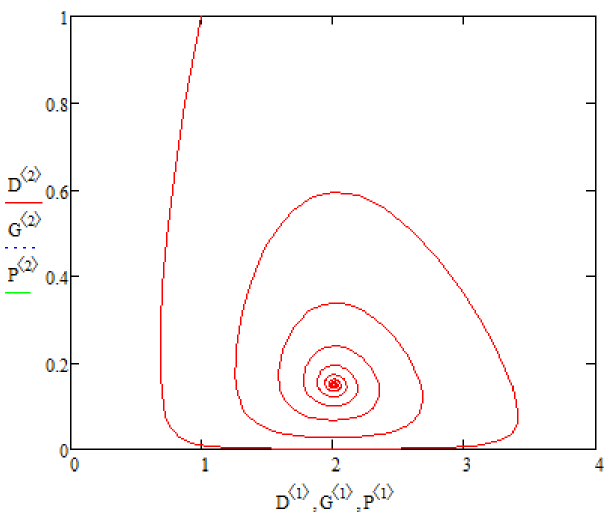
пример гармонического осциллятора, где ***F*** – возвращающая сила, ***k*** – коэффициент, ***x*** – смещение.

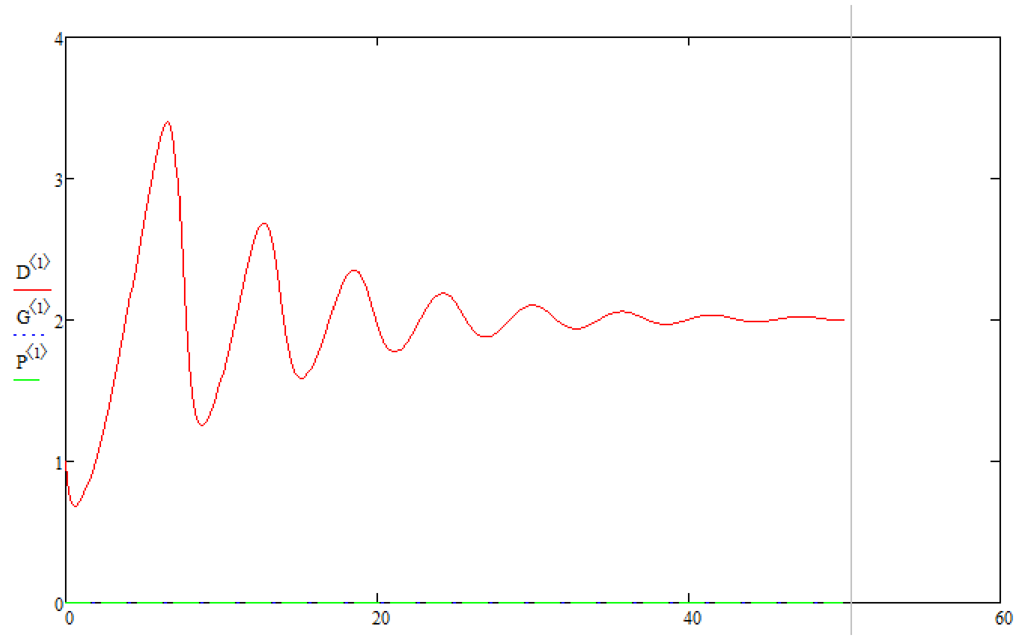


10.3. Задание системой ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = (\propto - cy)x, \\ \dot{y} = (-\beta + dx)y, \end{cases}$$

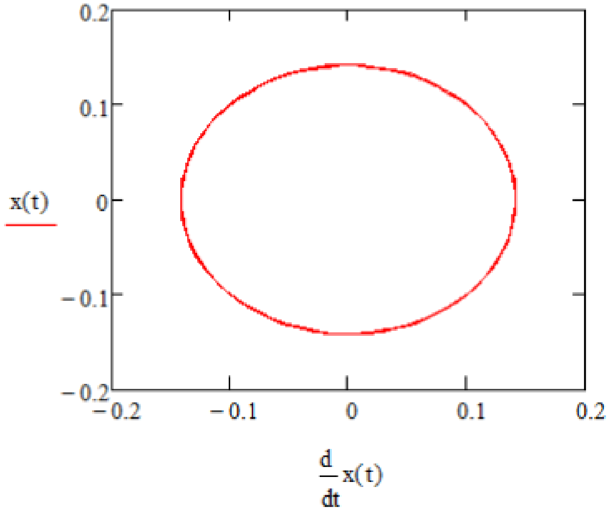
модель Волтерры-Лотки, представляющая собой систему дифференциальных уравнений, где x – число жертв, а y – хищников.

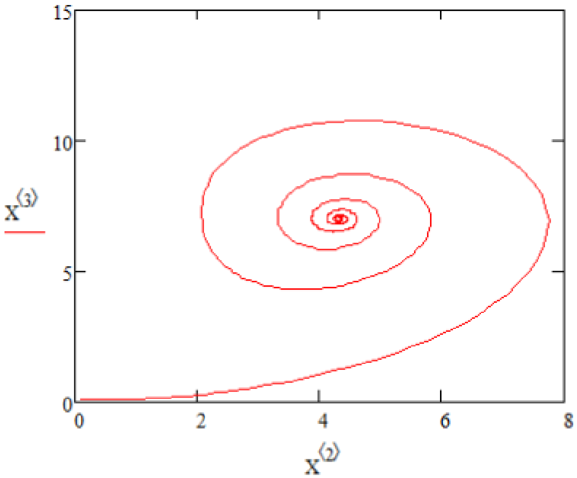


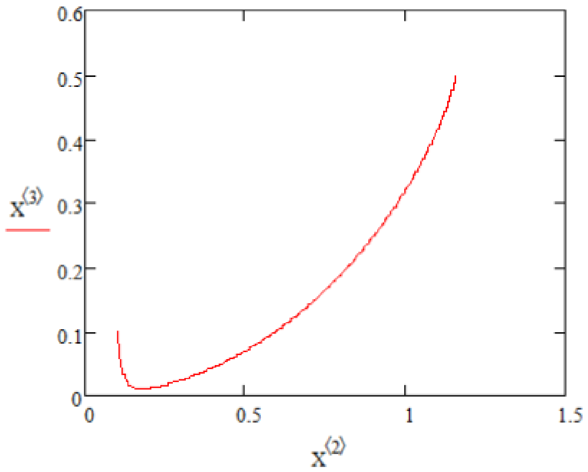


11. Особые точки системы

Особая точка
точка в фазовом пространстве, к которой асимптотически стремятся решения. Например, центр, фокус, узел и седло.

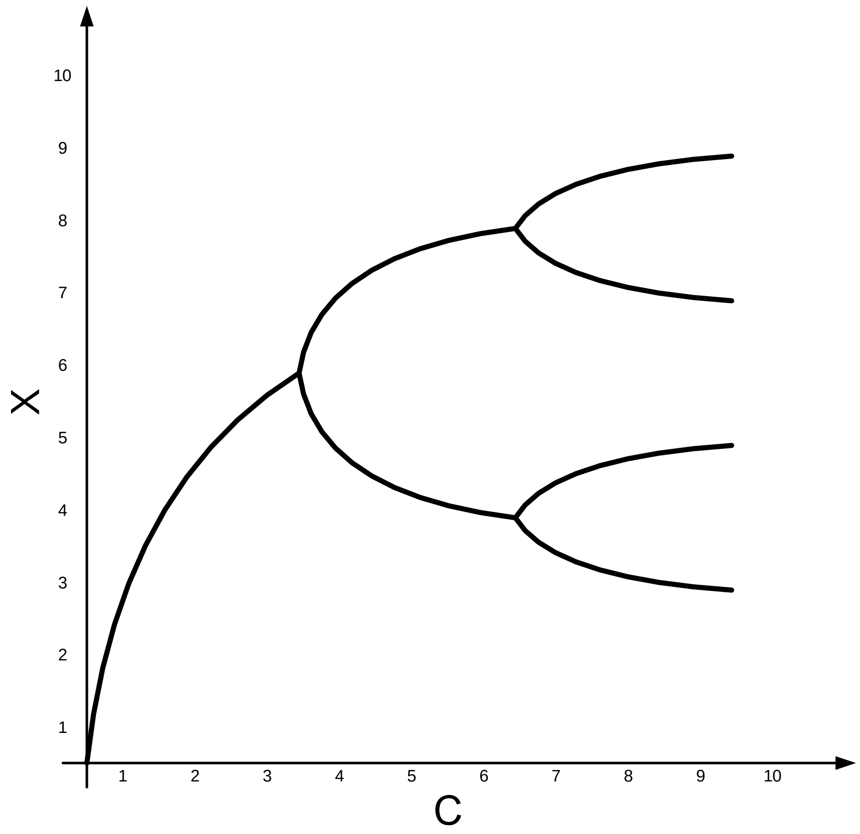






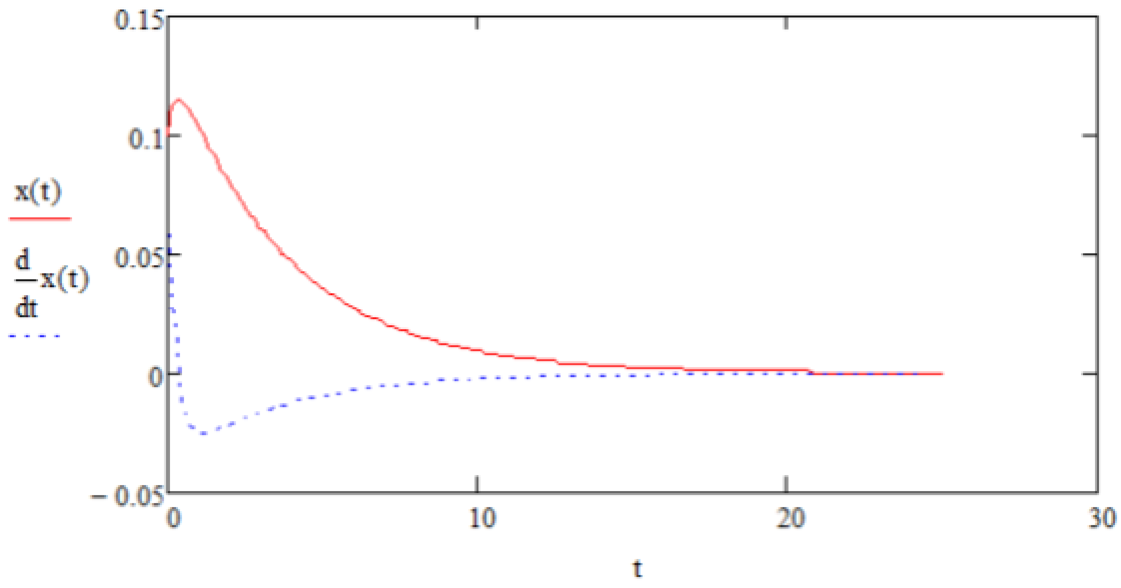
12. Бифуркация системы

Бифуркация
приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении ее параметров.



13. Устойчивость системы

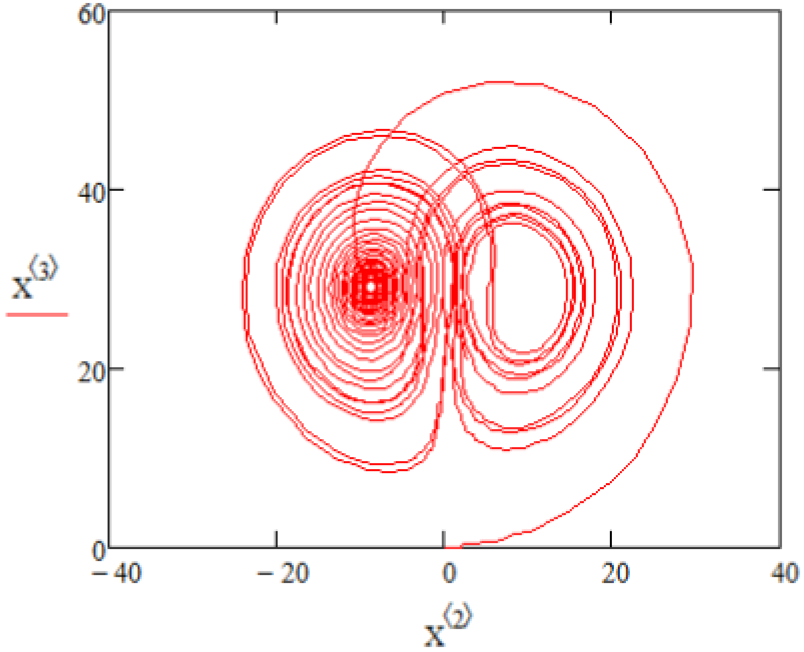
Устойчивость
свойство системы возвращаться к равновесному состоянию или циклическому режиму после устранения возмущений, вызвавшее нарушение последнего.



14. Хаос

Динамический хаос

явление, при котором поведение динамической системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами.

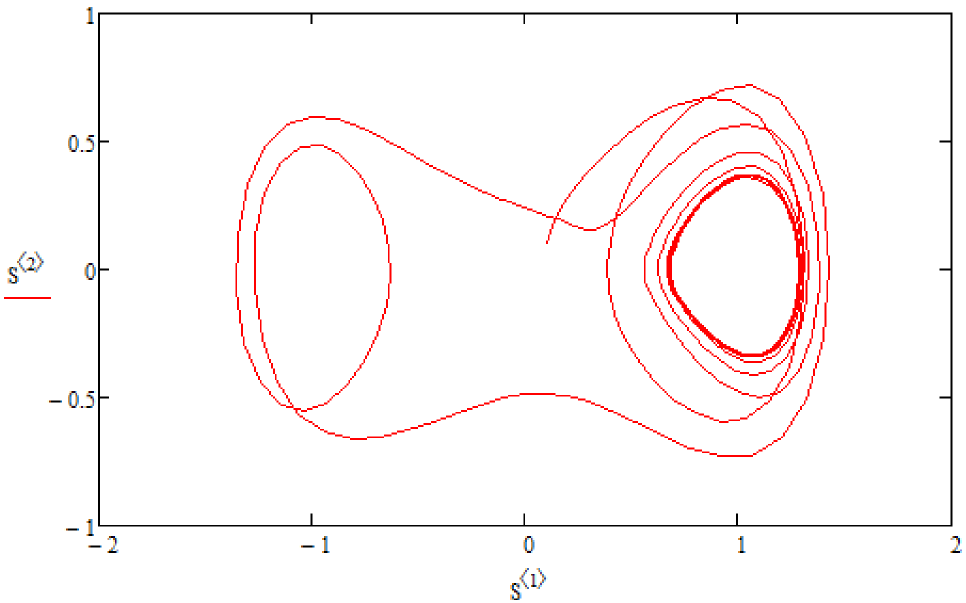


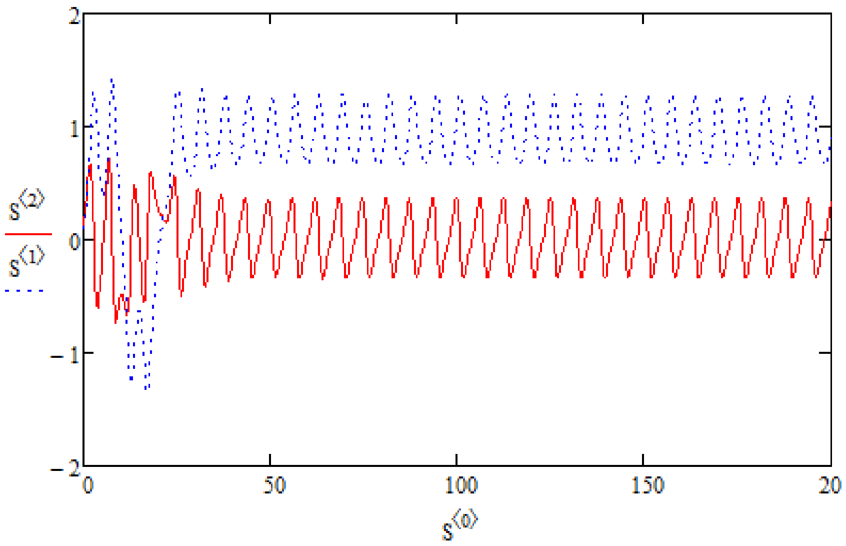
15. Примеры динамических систем

15.1. Осциллятор Дуффинга

$$m\ddot{x} = -ax - bx^3$$

где m – масса частицы, x – координата частицы,
a и b – коэффициенты.

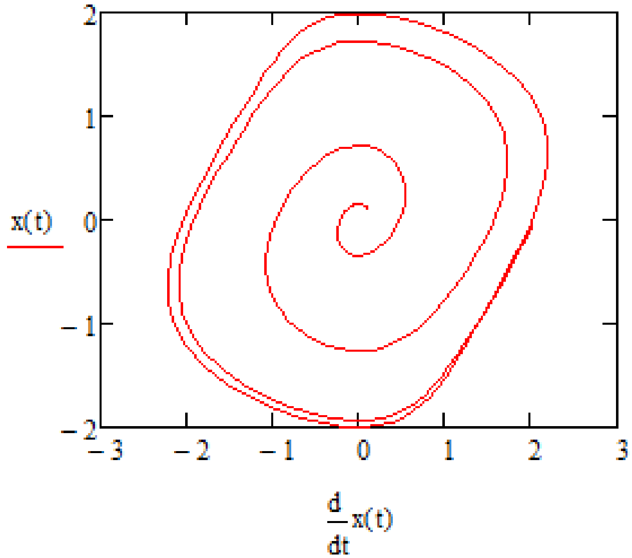


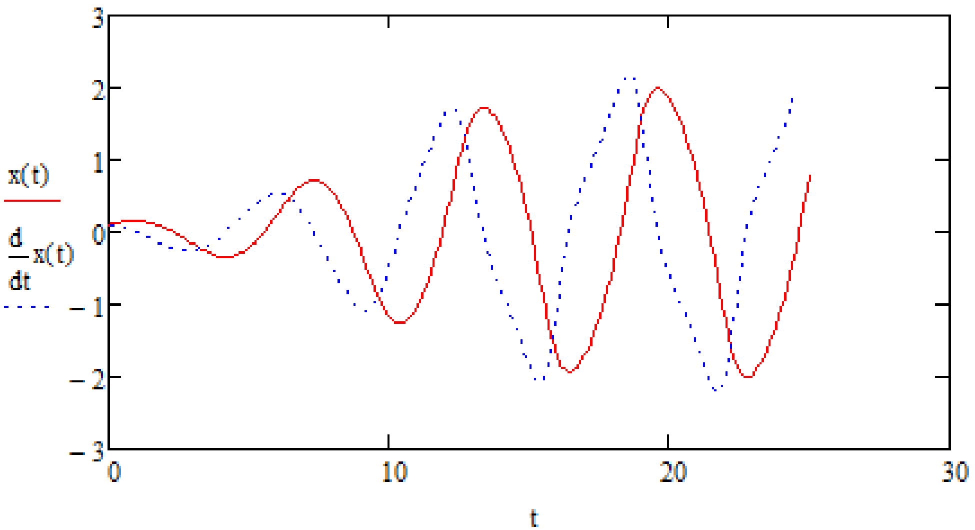


15.2. Генератор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

где x – координата точки, зависящая от t, μ - коэффициент, характеризующий силу затуханий колебаний.

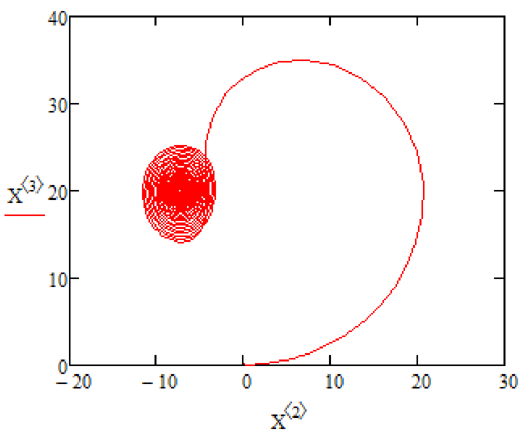


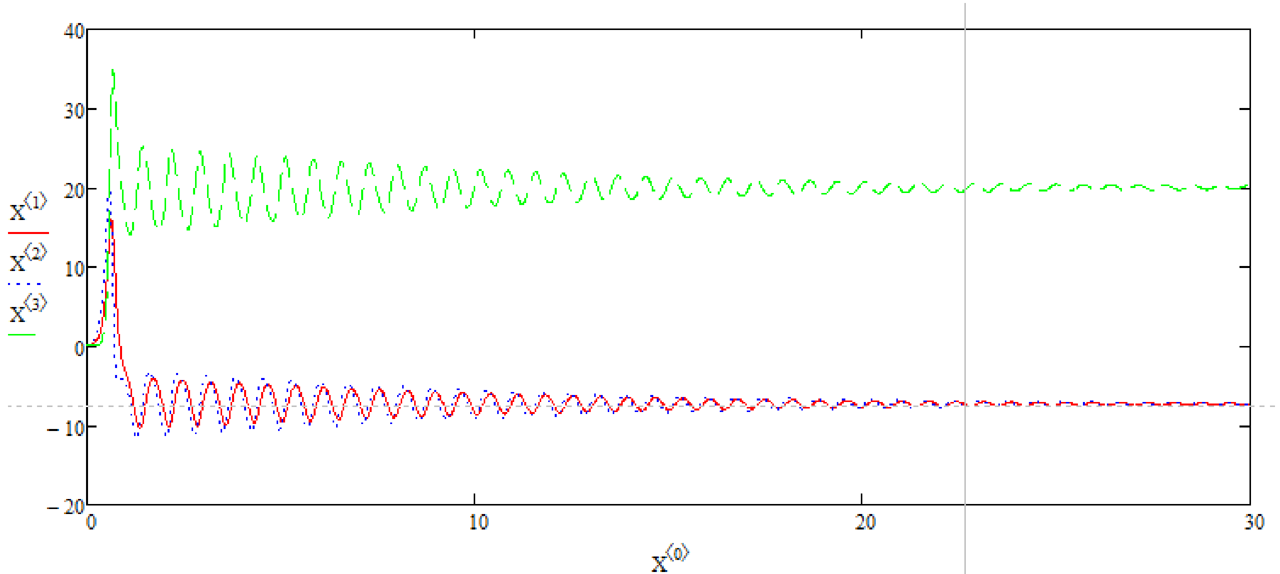


15.3. Система Лоренца

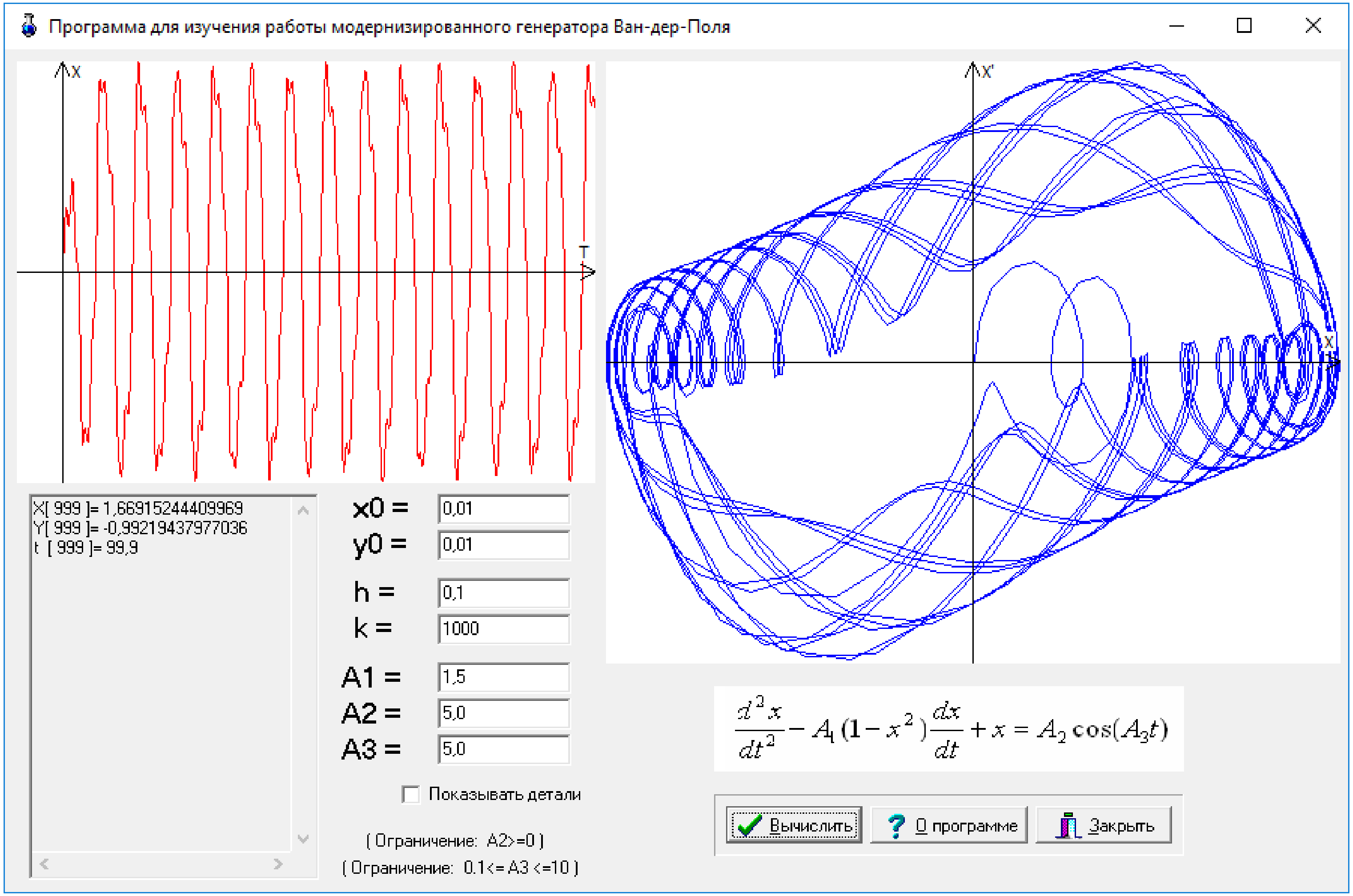
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где σ, r и $b > 0$, а x, y, z – параметры, зависящие от t.

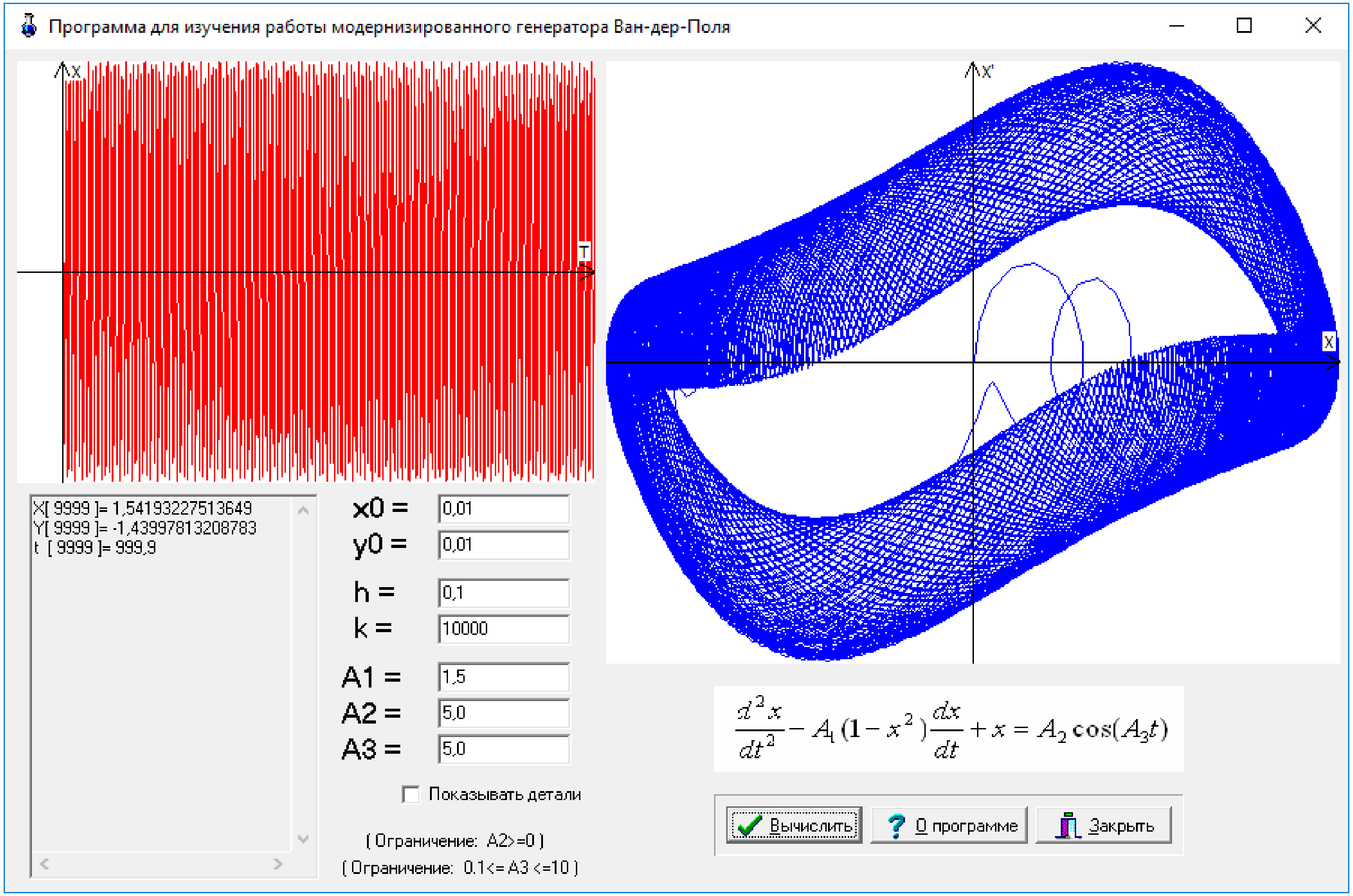




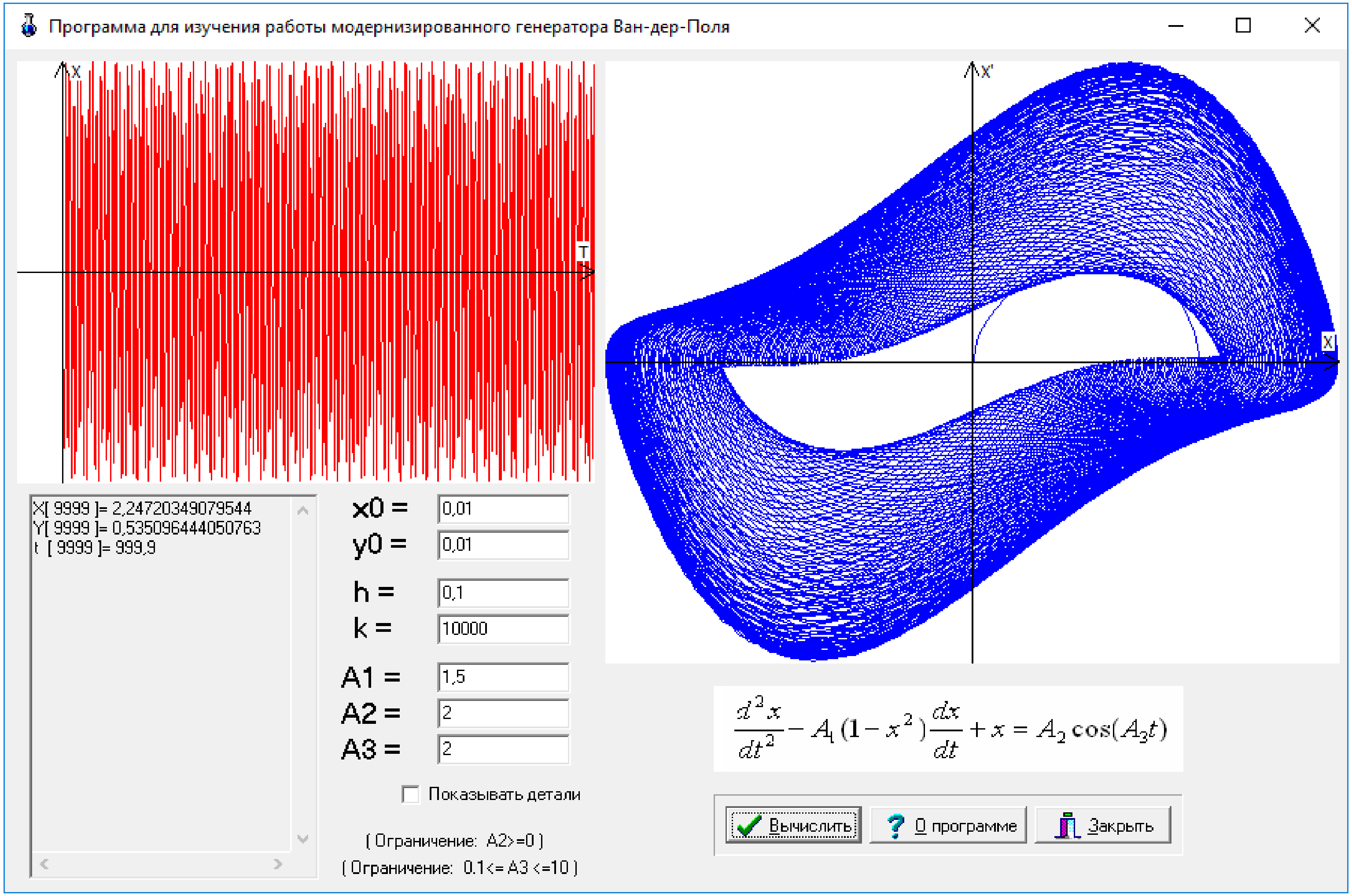
16. Реализация Ван-дер-Поля в C++ (1 из 3)



16. Реализация Ван-дер-Поля в С++ (2 из 3)



16. Реализация Ван-дер-Поля в С++ (3 из 3)



17. Список литературы

- Вся высшая математика. Т3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости / Краснов М.Л. и др. – М.: ЛИБРОКОМ, 2017. – 240 с.

- Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 3. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, устойчивость, фазовые траектории, метод интегральных преобразований Лапласа. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 254 с.

- Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос: Основные понятия. – М.: ЛИБРОКОМ, 2018. – 240 с.